NOMBRES, ÉQUATIONS, INÉQUATIONS

Table des matières

I Ensembles de nombres **1**

II Bases d'arithmétique **2**
A - Divisibilité et division euclidienne . . . 2
B - Nombres premiers . . . 2
C - PGCD, PPCM et nombres premiers entre eux . . . 3
D - Application à l'irrationalité de $\sqrt{p}$. . . . 3

III Rappels sur les réels **4**
A - Inégalités dans $\mathbb{R}$ . . . 4
B - Valeur absolue . . . 4
C - Puissances et racines carrées . . . 6
D - Parties entières . . . 8

IV Systèmes d'équations **9**
A - Généralités . . . 9
B - Algorithme du pivot de Gauss . . . 11

I) ENSEMBLES DE NOMBRES

Définition 1 (Ensembles de nombres usuels)

- On note $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ les ensembles respectifs des **entiers naturels**, des **entiers relatifs**, des **nombres rationnels**, des **nombres réels** et des **nombres complexes**.
- Les ensembles $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}^*$, $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{R}^*$ et $\mathbb{C}^*$ désignent les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ privés de 0.
- L'ensemble $\mathbb{R}_+$ désigne l'ensemble des réels positifs et $\mathbb{R}_-$ celui des réels négatifs (au sens large).
- L'ensemble $\mathbb{R}_+^*$ désigne l'ensemble des réels strictement positifs et $\mathbb{R}_-^*$ celui des réels strictement négatifs.

On a la chaîne d'inclusions (strictes) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Définition 2 (Exemples d'intervalles de $\mathbb{R}$)

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on définit les **intervalles** suivants :

- Les **segments** : $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$.
- Les **intervalles ouverts**, par exemple : $]a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ et $]a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$.
- Les **intervalles semi-ouverts**, par exemple : $]a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$ et $]-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant b\}$.

Si $a > b$, alors $[a,b] =]a,b[= \varnothing$: ces notations n'imposent pas $a < b$, mais désignent alors l'ensemble vide.

Les ensembles précédents possèdent tous une même propriété : ils ne comportent aucun « trou ». On donne alors la définition d'un intervalle qui généralise cette propriété.

Définition 3 (Intervalle)

On appelle intervalle de $\mathbb{R}$ toute partie I de $\mathbb{R}$ telle que : $\forall x, y \in I,\ [x,y] \subset I$.

Quels sont exactement les intervalles de $\mathbb{R}$? La propriété suivante y répond, démontrée au chapitre « Suites réelles ».

Proposition 4 (Intervalles de $\mathbb{R}$)

Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont exactement les ensembles décrits dans la **Définition 2**

Définition 5 (Intervalles d'entiers)

Pour tous $a, b \in \mathbb{Z}$, l'ensemble des entiers compris entre a et b est noté : $[\![a;b]\!] = \{n \in \mathbb{Z} \mid a \leqslant n \leqslant b\} = [a,b] \cap \mathbb{Z}$.

Exemple 6 $[\![2;5]\!] = \{2,3,4,5\}$ et $[\![-1;1]\!] = \{-1,0,1\}$.

Proposition 7 (Cardinal d'un intervalle d'entiers)
Pour tous $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $a \leqslant b$, $\quad \text{Card}(\llbracket a; b \rrbracket) = b - a \boxed{+1}$.

II) Bases d'arithmétique

A - Divisibilité et division euclidienne

Définition 8 (Divisibilité, multiple)
Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. On dit que a **divise** b, que b **est divisible par** a ou que b **est un multiple de** a si $\quad \exists k \in \mathbb{Z},\ b = ak$.

Exemple 9 Les diviseurs positifs de 6 sont $1, 2, 3, 6$, et ceux de 11 sont 1 et 11. Les opposés sont aussi des diviseurs.

Proposition 10 (Division euclidienne)
Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$. Il existe un et un seul couple $(q, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ pour lequel $a = bq + r$ et $r \in \llbracket 0; b-1 \rrbracket$. L'entier a est appelé le **dividende** de la division euclidienne de a par b, b son **diviseur**, q son **quotient** et r son **reste**.

Exemple 11 La division euclidienne de 23 par 5 s'écrit $23 = 5 \times 4 + 3$: le quotient est 4 et le reste est 3.

Pour tous $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$, b divise a si et seulement si le reste de la division euclidienne de a par b est nul.
Tout entier relatif est par ailleurs **pair** ou **impair**, *i.e.* de la forme $2k$ ou de la forme $2k+1$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$, mais pas les deux.

B - Nombres premiers

Définition 12 (Nombre premier)
Soit $p \in \mathbb{N}$. On dit que p est **premier** si $p \neq 1$ et si ses seuls diviseurs sont ± 1 et $\pm p$.
On note $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres premiers.

Exemple 13 $2, 3, 5, 7, 11, 13$ sont premiers. En revanche 1 ne l'est pas (par convention), et 9 non plus car 3 divise 9.

Les nombres premiers sont les briques élémentaires de la multiplication : ils sont indécomposables, et tout entier supérieur à 1 se décompose en produit de nombres premiers — 1 lui-même correspondant au produit vide, et tout entier $\geqslant 2$ admettant la décomposition donnée par le théorème suivant.

Théorème 14 (Factorisation première)
Tout entier supérieur à 2 peut être écrit d'une et une seule manière sous la forme $p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$ où $r \in \mathbb{N}^*$, $p_1, \dots, p_r$ sont des nombres premiers tels que $p_1 < \dots < p_r$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{N}^*$. Cette forme est appelée la **factorisation première**.
En particulier, tout entier supérieur à 2 possède au moins un diviseur premier.

Démonstration
On ne démontre que l'existence, par récurrence FORTE.
Initialisation : 2 est premier.
Hérédité : Soit $n \geq 2$. Supposons que tout entier compris entre 2 et n est un produit de nombres premiers.
- Si $n+1$ est premier alors $n+1$ est produit de nombres premiers.
- Sinon, il existe $a, b \in \mathbb{N}$ tel que $1 < a, b < n+1$ et $n+1 = ab$. Par hypothèse de récurrence, a et b sont produits de nombres premiers, donc $n+1$ aussi.

Conclusion : Par récurrence forte, nous avons démontré l'existence de la factorisation première. ■

Exemple 15 $5 = 5, \quad 20 = 2^2 \times 5, \quad 24 = 2^3 \times 3, \quad 63 = 3^3 \times 7.$

Proposition 16 (Infinitude de l'ensemble des nombres premiers)
L'ensemble des nombres premiers est infini.

Démonstration
Par l'absurde, supposons $\mathbb{P}$ fini et notons $p_1, \dots, p_r$ ses éléments. Posons $N = p_1 \cdots p_r + 1$. L'entier N est supérieur à 2, donc est produit de nombres premiers d'après le théorème précédent. En particulier, il possède un diviseur premier, disons p_k pour un certain $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$. Ainsi, p_k divise à la fois N et $p_1 \cdots p_r$, donc également leur différence $N - p_1 \cdots p_r = 1$. Il en découle $p_k = 1$, ce qui est impossible. ■

C - PGCD, PPCM et nombres premiers entre eux

Proposition 17 (PGCD, PPCM)

Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$.

- **PGCD :** Le plus grand diviseur commun positif de a et b est appelé le **PGCD** de a et b et noté $a \wedge b$.
- **PPCM :** Le plus petit multiple commun strictement positif de a et b est appelé le **PPCM** de a et b et noté $a \vee b$.
- **Calcul à partir des factorisations premières :** Soient $p_1, \dots, p_r$ des nombres premiers distincts et $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_r \in \mathbb{N}$. Alors

$$(p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}) \wedge (p_1^{\beta_1} \cdots p_r^{\beta_r}) = p_1^{\min(\alpha_1,\beta_1)} \cdots p_r^{\min(\alpha_r,\beta_r)} \quad \text{et} \quad (p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}) \vee (p_1^{\beta_1} \cdots p_r^{\beta_r}) = p_1^{\max(\alpha_1,\beta_1)} \cdots p_r^{\max(\alpha_r,\beta_r)}.$$

Exemple 18

$$\begin{cases} 84 \wedge 180 = \left(2^2 \cdot 3 \cdot 7\right) \wedge \left(2^2 \cdot 3^2 \cdot 5\right) = 2^2 \cdot 3 = 12, \\ 84 \vee 180 = \left(2^2 \cdot 3 \cdot 7\right) \vee \left(2^2 \cdot 3^2 \cdot 5\right) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 1260. \end{cases}$$

Définition 19 (Entiers premiers entre eux)

Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$. On dit que a et b sont **premiers entre eux** si $a \wedge b = 1$. Cela revient à dire que leurs seuls diviseurs communs sont ± 1, ou encore, que leurs factorisations premières n'ont aucun facteur premier en commun.

Exemple 20 20 et 63 sont premiers entre eux car leurs factorisations premières ne contiennent aucun facteur premier commun :

$$20 = 2^2 \times 5, \qquad 63 = 3^2 \times 7.$$

Théorème 21 (Forme irréductible d'un rationnel)

Tout rationnel peut s'écrire, d'une et unique manière, sous la forme $\frac{p}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ avec $|p|$ et q premiers entre eux. On dit que la fraction est écrite sous **forme irréductible**.

Pour simplifier les calculs et les écritures, on cherchera toujours à écrire les fractions sous forme irréductible.

Exemple 22 Pour rendre une fraction irréductible, on simplifie les facteurs premiers communs au numérateur et au dénominateur à l'aide de la factorisation première. Par exemple :

$$\frac{126}{210} = \frac{2 \times 3^2 \times 7}{2 \times 3 \times 5 \times 7} = \frac{3}{5}.$$

Exemple 23 Pour sommer $\frac{1}{84}$ et $\frac{7}{180}$, on met les deux fractions au même dénominateur. On choisit le PPCM des dénominateurs, et non leur produit ! Pour le déterminer, on utilise leurs factorisations premières :

$$84 = 2^2 \times 3 \times 7 \text{ et} \qquad 180 = 2^2 \times 3^2 \times 5, \quad \text{donc} \quad 84 \vee 180 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7 = 1260.$$

On peut alors effectuer la somme :

$$\frac{1}{84} + \frac{7}{180} = \frac{1 \times 15}{84 \times 15} + \frac{7 \times 7}{180 \times 7} = \frac{15}{1260} + \frac{49}{1260} = \frac{64}{1260} = \frac{16}{315}.$$

D - Application à l'irrationalité de $\sqrt{p}$.

Proposition 24 (Irrationalité de $\sqrt{p}$)

$\sqrt{p}$ est irrationnel pour tout nombre premier p. En particulier, $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Démonstration

Soit $p \in \mathbb{P}$. Supposons par l'absurde que $\sqrt{p}$ est rationnel, soient alors $a, b \in \mathbb{N}^*$ tels que $\sqrt{p} = \frac{a}{b}$.

Notons α (resp. β) l'exposant de p dans la factorisation première de a (resp. b). Alors, dans la relation $a^2 = pb^2$, l'exposant de p vaut 2α à gauche et $2\beta + 1$ à droite, donc $2\alpha = 2\beta + 1$ par unicité de la factorisation première, ce qui est impossible, car un nombre ne peut pas être pair et impair à la fois. ■

III) Rappels sur les réels

On passe maintenant aux outils de calcul sur $\mathbb{R}$ qui serviront tout au long de l'année : inégalités, valeur absolue, puissances et partie entière.

A - Inégalités dans $\mathbb{R}$

Théorème 25 (Inégalités)

Soient $a, b, c, d, \lambda \in \mathbb{R}$.

- **Lien strict/large :**
  - $a \leqslant b \iff a < b$ ou $a = b$.
  - Si $a, b \in \mathbb{N}$: $\quad a < b \iff a + 1 \leqslant b$.

Dans les règles suivantes, on peut remplacer les inégalités larges par des inégalités strictes.

- **Somme d'inégalités :** Si $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$, alors : $\quad a + c \leqslant b + d$.
- **Produit :**
  - **par un réel positif :** Si $\quad a \leqslant b$ et $\lambda \geq 0$, $\quad$ alors : $\quad \lambda a \leqslant \lambda b$.
  - **par un réel négatif :** Si $\quad a \leqslant b$ et $\lambda \leqslant 0$, $\quad$ alors : $\quad \lambda a \geq \lambda b$.
  - **Produit d'inégalités positives :** Si $\begin{cases} 0 \leqslant a \leqslant b \\ 0 \leqslant c \leqslant d, \end{cases}$ alors : $\quad 0 \leqslant ac \leqslant bd$.
- **Inverse :** Si $a, b \neq 0$ sont de même signe avec $a \leqslant b$, alors : $\quad \dfrac{1}{b} \leqslant \dfrac{1}{a}$.

⚠ Le **signe** est essentiel dans les manipulations d'inégalités, aussi bien lorsqu'on multiplie une inégalité par un réel que lorsqu'on multiplie deux inégalités entre elles. Il faut donc **toujours justifier** les conditions de signe utilisées sur sa copie.
On ne **soustrait** ni ne **divise** membre à membre deux inégalités. Pour manipuler des différences, on se ramène à une somme en multipliant par -1 ; pour manipuler des quotients, on se ramène à un produit en passant à l'inverse.

Pour **majorer** une fraction, on cherche à **majorer** le numérateur ou à **minorer** le dénominateur.

Exemple 26 Soit $x \in [1, 2]$. On a alors : $\quad \dfrac{5}{13} \leqslant \dfrac{3x+2}{2x^2+5} \leqslant \dfrac{8}{7}$.

Démonstration

On a $1 \leqslant x \leqslant 2$, donc $5 \leqslant 3x + 2 \leqslant 8$ et $7 \leqslant 2x^2 + 5 \leqslant 13$. Par inversion positive, $\dfrac{1}{13} \leqslant \dfrac{1}{2x^2+5} \leqslant \dfrac{1}{7}$.
En multipliant les inégalités positives, on obtient $\dfrac{5}{13} \leqslant \dfrac{3x+2}{2x^2+5} \leqslant \dfrac{8}{7}$. ■

Exemple 27 Pour tout $x > 0$, $\quad x + \dfrac{1}{x} \geq 2$.

Démonstration

On cherche à raisonner par équivalence pour arriver sur une inégalité plus naturelle :

$$x + \frac{1}{x} \geq 2 \underset{x>0}{\iff} x^2 + 1 \geq 2x \iff x^2 - 2x + 1 \geq 0 \iff (x-1)^2 \geq 0.$$

La dernière égalité étant vraie pour tout $x > 0$, la première l'est également. Si on a écrit cette suite d'équivalences au brouillon, c'est naturel, sur une copie, de partir de la fin et d'en déduire la première égalité. ■

B - Valeur absolue

Définition 28 (Valeur absolue)

Soit $x \in \mathbb{R}$. On définit la **valeur absolue de** x le réel $|x|$ défini par : $\quad |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{sinon .} \end{cases}$

Proposition 29 (Propriétés de la valeur absolue)

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|x| \geqslant 0$, avec égalité si et seulement si $x = 0$. De plus, $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$.
- **Encadrement :** Pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}_+$, $|x| \leqslant y \iff -y \leqslant x \leqslant y$ et $|x| < y \iff -y < x < y$.
- **Interprétation géométrique :** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x|$ représente la distance entre 0 et x sur la droite réelle.
- **Produit :** Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a : $|xy| = |x||y|$.

Démonstration

Encadrement : $-y \leqslant x \leqslant y \iff \begin{cases} x \leqslant y \\ -x \leqslant y \end{cases} \iff |x| \leqslant y$ ■

Exemple 30

$$|x-a| \leqslant \varepsilon \iff x \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon] \qquad \text{et} \qquad |x-a| < \varepsilon \iff x \in]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$$

Autrement dit, $|x-a|$ mesure la **distance** entre x et a, et la condition $|x-a| \leqslant \varepsilon$ signifie que x est à distance au plus ε de a.

Démonstration

$$|x-a| \leqslant \varepsilon \iff -\varepsilon \leqslant x-a \leqslant \varepsilon \iff a-\varepsilon \leqslant x \leqslant a+\varepsilon.$$ ■

Proposition 31 (Inégalité triangulaire)

- **Inégalité triangulaire :** Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a : $|x+y| \leqslant |x| + |y|$.
- **Inégalité triangulaire généralisée :** Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a : $||x| - |y|| \leqslant |x \pm y| \leqslant |x| + |y|$.

Démonstration

L'inégalité triangulaire sera démontrée dans le chapitre des nombres complexes. Démontrons l'inégalité triangulaire généralisée en admettant l'inégalité triangulaire.

- On applique l'inégalité triangulaires aux réels x et $-y$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$: $|x-y| \leqslant |x| + |y|$.
- On applique l'inégalité triangulaire aux réels $x+y$ et $-y$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$: $|x| \leqslant |x+y| + |y|$ et donc $|x| - |y| \leqslant |x+y|$.
- Par symétrie des rôles, on a également $|y| - |x| \leqslant |x+y|$. On a donc $|x+y|$ supérieur à $|x| - |y|$ et à son opposé, donc à sa valeur absolue. On en déduit donc l'inégalité triangulaire généralisée. ■

De manière générale, les valeurs absolues forment des blocs qu'on ne peut pas simplifier directement. Pour les supprimer, on se place sur des intervalles où l'expression à l'intérieur est de signe constant.

Exemple 32 Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $|x-3| - |x+2| = \begin{cases} -(x-3)+(x+2) = 5 & \text{si } x \in]-\infty, -2[\\ -(x-3)-(x+2) = 1-2x & \text{si } x \in [-2, 3[\\ (x-3)-(x+2) = -5 & \text{si } x \in [3, +\infty[\end{cases}$

Exemple 33 Résolvons l'équation $|x-3| = 2x+1$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Démonstration

- Pour $x \geqslant 3$, $|x-3| = 2x+1 \iff x-3 = 2x+1 \iff x = -4$,
  or, $-4 \notin [3, +\infty[$, donc l'équation n'a pas de solution sur $[3, +\infty[$.
- Pour $x < 3$, $|x-3| = 2x+1 \iff 3-x = 2x+1 \iff 3x = 2 \iff x = \dfrac{2}{3}$,
  or, $\dfrac{2}{3} \in]-\infty, 3[$, donc $\dfrac{2}{3}$ est bien solution.

L'équation admet donc $\dfrac{2}{3}$ comme unique solution sur $\mathbb{R}$. ■

Exemple 34 On veut résoudre l'inéquation $|x-4| < \dfrac{5}{x}$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}^*$.

Démonstration

L'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}_-^*$ car $\dfrac{5}{x} < 0$ pour tout $x < 0$ alors que $|x-4| \geqslant 0$.

- Pour tout $x \in]0, 4[$,

$$|x-4| < \frac{5}{x} \iff 4-x < \frac{5}{x} \underset{x>0}{\iff} x(4-x) < 5 \iff x^2 - 4x + 5 > 0 \overset{\text{discriminant } -4}{\iff} x \in]0, 4[.$$

- Pour tout $x \in [4, +\infty[$,

$$|x-4| < \frac{5}{x} \iff x-4 < \frac{5}{x} \underset{x>0}{\iff} x(x-4) < 5 \iff x^2-4x-5 < 0$$
$$\iff (x+1)(x-5) < 0 \iff x \in]-1,5[\iff x \in [4,5[.$$

L'ensemble des solutions est donc l'ensemble $]0,4[\cup [4,5[=]0,5[$. ■

⚠ Pas de majoration à l'intérieur d'une valeur absolue : majorer $|x|$, c'est encadrer x.

Exemple 35 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\sin(x) \leqslant 1$. On pourrait alors être tenté d'en déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad |\sin(x) + \ln(x)| \leqslant |1 + \ln(x)|.$$

C'est faux ! En prenant $x = \dfrac{1}{e}$, on obtient $|\sin(1/e) + \ln(1/e)| = 1 - \sin(1/e) > 0$,
alors que $|1 + \ln(1/e)| = |1-1| = 0$.
On ne peut donc pas remplacer un terme par une majoration à l'intérieur d'une valeur absolue.

C - Puissances et racines carrées

Définition 36 (Puissances)

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On définit x **puissance** n par : $x^n = \underbrace{x \times \cdots \times x}_{n \text{ fois}}$ avec $x^0 = 1$ par convention.
De plus, si $x \neq 0$, on définit : $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$.

Définition 37 (Racine carrée)

Soit $x \geq 0$. Il existe un unique réel $r \geq 0$ tel que $r^2 = x$. On l'appelle la **racine carrée** de x et on la note $\sqrt{x}$.

Proposition 38 (Règles de calcul)

- **Puissances :** Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ et $n, m \in \mathbb{N}$: $x^{m+n} = x^m x^n$, $x^{mn} = (x^m)^n$, et $(xy)^n = x^n y^n$.
- **Racine carrée :** Pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+$: $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\sqrt{x^2} = |x|$.

⚠ La quantité $(\sqrt{x})^2$ n'est définie que si $x \geq 0$, et par définition de la racine carrée : $(\sqrt{x})^2 = x$.
La quantité $\sqrt{x^2}$, au contraire, est toujours définie, mais comme le passage au carré perd le signe de x : $\sqrt{x^2} = |x|$.
Par conséquent, en général : $\sqrt{x^2} \not\equiv x$.

Proposition 39 (Quelques équivalences)

Pour tous $a, b, x, y \in \mathbb{R}$:
$$ax = ay \iff a = 0 \text{ ou } x = y,$$
$$a^2 = b^2 \iff a = b \text{ ou } a = -b \iff |a| = |b|.$$
$$x = |a| \iff x^2 = a^2 \text{ et } x \geq 0.$$
et pour $a \geq 0$:
$$x = \sqrt{a} \iff x^2 = a \text{ et } x \geq 0.$$

Exemple 40 L'équation $|x-1| = 2|x+2|$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ admet -5 et -1 pour solutions.

Démonstration

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$|x-1| = 2|x+2| \iff (x-1)^2 = \big(2(x+2)\big)^2 \iff (x-1)^2 - \big(2(x+2)\big)^2 = 0$$
$$\iff \big[(x-1) - 2(x+2)\big]\big[(x-1) + 2(x+2)\big] = 0$$
$$\iff -3(x+5)(x+1) = 0 \iff x \in \{-5, -1\}.$$

■

Exemple 41 (Re-)résolvons l'équation $|x-3|=2x+1$ d'inconnue $x\in\mathbb{R}$.

Démonstration

Si $x<-\frac{1}{2}$, alors $2x+1<0$ et donc l'équation n'admet pas de solution. On suppose $x\geq-\frac{1}{2}$, alors :

$$|x-3|=2x+1 \iff (x-3)^2=(2x+1)^2 \iff \big((x-3)-(2x+1)\big)\big((x-3)+(2x+1)\big)=0$$
$$\iff (-x-4)(3x-2)=0 \iff x=-4 \text{ ou } x=\frac{2}{3} \iff x=\frac{2}{3}.$$

L'équation admet donc $\frac{2}{3}$ comme unique solution sur $\mathbb{R}$. ■

⚠ Pour résoudre $\sqrt{f(x)}=g(x)$, il est **indispensable** d'imposer $g(x)\geq 0$ avant d'élever au carré. Sans cette condition, l'élévation au carré peut faire apparaître des solutions telles que $g(x)<0$, qui ne vérifient donc pas l'équation de départ.

Exemple 42 L'équation $\sqrt{x+2}=x$ d'inconnue $x\in\mathbb{R}$ admet 2 pour unique solution.

Démonstration

Pour tout $x\in[-2,+\infty[$:

$$\sqrt{x+2}=x \iff x+2=x^2 \text{ et } x\geq 0 \iff x^2-x-2=0 \text{ et } x\geq 0 \iff (x+1)(x-2)=0 \text{ et } x\geq 0$$
$$\iff x\in\{-1,2\} \text{ et } x\geq 0 \iff x=2.$$ ■

Pour les inégalités, c'est le même principe !

Proposition 43 (Quelques équivalences)

Pour tous $a,b\in\mathbb{R}$: $a^2\leqslant b^2 \iff |a|\leqslant|b|$.

pour $a,b\geq 0$: $a\leqslant b \iff a^2\leqslant b^2$.

et pour $a\geq 0$ seulement : $a=b \iff a^2=b^2$ (et) $b\geq 0$.

Exemple 44 On veut résoudre l'inéquation $|x-2|\leqslant 2|x+1|$ d'inconnue $x\in\mathbb{R}$.

Démonstration

Pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$|x-2|\leqslant 2|x+1| \iff (x-2)^2\leqslant 4(x+1)^2 \iff 3x^2+12x\geq 0 \iff 3x(x+4)\geq 0$$
$$\iff x(x+4)\geq 0 \iff x\in\,]-\infty,-4]\cup[0,+\infty[\,.$$ ■

Exemple 45 On veut résoudre l'inéquation $\left|x^2-3x+2\right|\leqslant x+1$ d'inconnue $x\in\mathbb{R}$.

Démonstration

On commence par un tableau de signe et on remarque que l'intérieur de la valeur absolue est positif si et seulement si $x\leqslant 1$ ou $x\geq 2$.

- Pour tout $x\in\,]1,2[$,

$$\left|x^2-3x+2\right|\leqslant x+1 \iff -x^2+3x-2\leqslant x+1 \iff -x^2+2x-3\leqslant 0 \iff x^2-2x+3\geq 0$$

Le discriminant du polynôme X^2-2X+3 est négatif, et donc le polynôme est toujours positif. Ainsi, l'inéquation est vérifiée sur $]1,2[$.

- Pour tout $x\in\,]-\infty,1]\cup[2,+\infty[$:

$$\left|x^2-3x+2\right|\leqslant x+1 \iff x^2-3x+2\leqslant x+1 \iff x^2-4x+1\leqslant 0$$

Les racines du polynôme X^2-4X+1 sont $\frac{4\pm\sqrt{12}}{2}$, c'est-à-dire $2\pm\sqrt{3}$.

Puisque $2-\sqrt{3}\leqslant 1$ et $2+\sqrt{3}\geq 2$, les solutions sur $]-\infty,1]\cup[2,+\infty[$ sont donc

$$\left[2-\sqrt{3},1\right]\cup\left[2,2+\sqrt{3}\right].$$

Finalement, l'ensemble des solutions de l'inéquation est : $\left[2-\sqrt{3},2+\sqrt{3}\right]$. ■

D - Parties entières

Définition 46 (Partie entière)

Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe un et unique $n \in \mathbb{Z}$ pour lequel $n \leqslant x < n+1$, appelé la **partie entière de** x et noté $\lfloor x \rfloor$. Cet entier est le plus grand entier inférieur ou égal à x. On a alors :

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

Le réel $x - \lfloor x \rfloor$ est appelé **partie fractionnaire** de x.

Exemple 47 $\lfloor 3,7 \rfloor = 3, \quad \lfloor 5 \rfloor = 5, \quad \lfloor -1,2 \rfloor = -2.$

Proposition 48 (Les entiers ne sont pas prisonniers)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, $\quad \lfloor n + x \rfloor = n + \lfloor x \rfloor$.

Démonstration

Par définition de la partie entière, $\quad \lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$.
En ajoutant n à chaque membre : $\quad n + \lfloor x \rfloor \leqslant n + x < n + \lfloor x \rfloor + 1$, avec $n + \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$.
Par unicité de la partie entière, on en déduit $\lfloor n + x \rfloor = n + \lfloor x \rfloor$. ■

Exemple 49 Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2x \rfloor.$$

Démonstration

Soit $x \in \mathbb{R}$, écrivons $x = n + \varepsilon$ avec $n = \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ et $\varepsilon \in [0,1[$. Aussitôt :

$$\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = 2n + \left\lfloor \varepsilon + \frac{1}{2} \right\rfloor \quad \text{et} \quad \lfloor 2x \rfloor = 2n + \lfloor 2\varepsilon \rfloor.$$

L'équation est alors équivalente à $\left\lfloor \varepsilon + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2\varepsilon \rfloor$.

On est amené à faire une disjonction de cas selon que $\varepsilon < \frac{1}{2}$ ou $\varepsilon \geq \frac{1}{2}$:

- Si $0 \leqslant \varepsilon < \frac{1}{2}$, alors $\frac{1}{2} \leqslant \varepsilon + \frac{1}{2} < 1$ et $0 \leqslant 2\varepsilon < 1$, donc
$$\left\lfloor \varepsilon + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2\varepsilon \rfloor = 0.$$
- Si $\frac{1}{2} \leqslant \varepsilon < 1$, alors $1 \leqslant \varepsilon + \frac{1}{2} < \frac{3}{2}$ et $1 \leqslant 2\varepsilon < 2$, donc
$$\left\lfloor \varepsilon + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2\varepsilon \rfloor = 1.$$

Dans les deux cas, on a donc $\left\lfloor \varepsilon + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2\varepsilon \rfloor$, ce qui prouve l'identité. ■

IV) Systèmes d'équations

A - Généralités

Définition 50 (Système linéaire)

Un **système linéaire** de p équations à n inconnues $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ est un système de la forme

$$(S): \quad \begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{p,1}x_1 + \cdots + a_{p,n}x_n = b_p \end{cases}$$

où les $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ sont les **coefficients** du système et les $b_i \in \mathbb{R}$ les **seconds membres**. **Résoudre** (S), c'est déterminer l'ensemble des n-uplets $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ qui vérifient SIMULTANÉMENT toutes les équations.

Le système linéaire est dit **homogène** si le second membre est nul. Un système linéaire homogène a toujours au moins une solution puisque le n-uplet $(0, \dots, 0)$ est solution.

Un système linéaire se lit géométriquement comme une intersection d'ensembles :

- Dans $\mathbb{R}^2$, chaque équation $ax + by = c$, avec $(a, b) \neq (0, 0)$, décrit une droite du plan. Résoudre un système revient à chercher les points communs à ces droites.
- Dans $\mathbb{R}^3$, chaque équation $ax + by + cz = d$, avec $(a, b, c) \neq (0, 0)$, décrit un plan de l'espace. Résoudre un système revient à chercher les points communs à ces plans.

Pourquoi de telles équations définissent respectivement une droite et un plan ? Raisonnons de manière géométrique et identifions un vecteur à ses coordonnées.

- **Dans $\mathbb{R}^2$:** Posons $\vec{n} = (a, b)$ et $\mathcal{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; ax + by = c\right\}$. Montrons que $\mathcal{D}$ est l'orthogonal de $\vec{n}$. Soit $A = (x_0, y_0) \in \mathcal{D}$. Pour tout $M = (x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} (x, y) \in \mathcal{D} &\iff ax + by = c \iff ax + by = ax_0 + by_0 \\ &\iff a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \iff \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff \vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0. \end{aligned}$$

  Ainsi, $\mathcal{D}$ est l'ensemble des points dont le vecteur depuis A est orthogonal à $\vec{n}$. Comme l'orthogonal de $\vec{n}$ est une droite, $\mathcal{D}$ est donc une droite orthogonale à $\vec{n}$.
- **Dans $\mathbb{R}^3$:** Posons $\vec{n} = (a, b, c)$ et $\mathcal{P} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; ax + by + cz = d\right\}$. Montrons que $\mathcal{P}$ est l'orthogonal de $\vec{n}$. Soit $A = (x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{P}$. Pour tout $M = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in \mathcal{P} &\iff ax + by + cz = d \iff ax + by + cz = ax_0 + by_0 + cz_0 \\ &\iff a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \iff \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff \vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0. \end{aligned}$$

  Ainsi, $\mathcal{P}$ est l'ensemble des points dont le vecteur depuis A est orthogonal à $\vec{n}$. Comme l'orthogonal de $\vec{n}$ est un plan, $\mathcal{P}$ est donc un plan orthogonal à $\vec{n}$.

Proposition 51 (Structure de l'ensemble des solutions d'un système linéaire)

Soit $\mathcal{S}$ un système linéaire.

- Ou bien $\mathcal{S}$ n'a pas de solution, on dit qu'il est **incompatible** ;
- Ou bien $\mathcal{S}$ a au moins une solution, on dit qu'il est **compatible**. Dans ce cas, l'ensemble des solutions de $\mathcal{S}$ est donné par

Solution générale = UNE solution particulière + Solution générale du système homogène

Démonstration

Supposons que $\mathcal{S}$ soit compatible et soit $X_0=(x_1^0,\dots,x_p^0)$ une solution particulière de $\mathcal{S}$. Notons $\mathcal{S}_0$ le système homogène associé à $\mathcal{S}$. Pour tout $X=(x_1,\dots,x_p)$,

$$\begin{aligned}
X \text{ est solution de } \mathcal{S} &\iff \begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1p}x_p=b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1+\cdots+a_{np}x_p=b_n \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1p}x_p=a_{11}x_1^0+\cdots+a_{1p}x_p^0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1+\cdots+a_{np}x_p=a_{n1}x_1^0+\cdots+a_{np}x_p^0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a_{11}(x_1-x_1^0)+\cdots+a_{1p}(x_p-x_p^0)=0 \\ \vdots \\ a_{n1}(x_1-x_1^0)+\cdots+a_{np}(x_p-x_p^0)=0 \end{cases} \\
&\iff X-X_0 \text{ est solution de } \mathcal{S}_0 \\
&\iff \text{il existe } X_h \text{ solution de } \mathcal{S}_0 \text{ tel que } X=X_0+X_h.
\end{aligned}$$

Ainsi, les solutions de $\mathcal{S}$ sont exactement les vecteurs de la forme X_0+X_h, où X_0 est une solution particulière de $\mathcal{S}$ et X_h une solution de $\mathcal{S}_0$. ■

Exemple 52 Le système linéaire $\begin{cases} x+y=1 \\ x+y=0 \end{cases}$ est incompatible.

Définition 53 (Notation Vect)

Soient $X_1,\dots,X_r\in\mathbb{R}^n$. on définit

$$\text{Vect}(X_1,\dots,X_r)=\{\lambda_1X_1+\cdots+\lambda_rX_r \mid \lambda_1,\dots,\lambda_r\in\mathbb{R}\},$$

l'ensemble des combinaisons linéaires de $X_1,\dots,X_r$.

Exemple 54 $\text{Vect}\big((2,3)\big)=\big\{(2x,3x) \;\big|\; x\in\mathbb{R}\big\}$ et $\text{Vect}\big((1,0),(0,1)\big)=\big\{(x,y) \;\big|\; x,y\in\mathbb{R}\big\}=\mathbb{R}^2$.

Exemple 55 Les solutions du système linéaire $\begin{cases} x+y+\ z=3 \\ 2x+y+3z=5 \end{cases}$ d'inconnue $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ sont les triplets $(2-2\lambda,1+\lambda,\lambda)$, λ décrivant $\mathbb{R}$. L'ensemble est plutôt noté $(2,1,0)+\text{Vect}\big((-2,1,1)\big)$.

Démonstration

$$\begin{aligned}
(x,y,z) \text{ solution de } \mathcal{S} &\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 3 \\ 2x & + & y & + & 3z & = & 5 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 3 \\ & - & y & + & z & = & -1 \end{array}\right. \qquad L_2\leftarrow L_2-2L_1 \\
&\iff \exists t\in\mathbb{R},\ \begin{cases} x=2-2t \\ y=1+t \\ z=t \end{cases} \\
&\iff \exists t\in\mathbb{R},\quad (x,y,z)=(2-2t,1+t,t). \\
&\iff (x,y,z)\in(2,1,0)+\text{Vect}\big((-2,1,1)\big).
\end{aligned}$$

■

B - Algorithme du pivot de Gauss

Pour résoudre un système, on n'utilisera plus la méthode de substitution, on utilisera à la place la méthode de pivot de Gauss, que nous allons décrire dans cette section.

Définition 56 (Opérations élémentaires sur les lignes)

On appelle **opération élémentaire** sur les lignes d'une matrice l'une des trois opérations suivantes :

- **Multiplication :** Multiplication d'une ligne L_i par un scalaire $\lambda \neq 0$ ce que l'on note $L_i \leftarrow \lambda L_i$.
- **Échange :** Échange des lignes L_i et L_j, ce que l'on note $L_i \leftrightarrow L_j$.
- **Transvection :** Ajout de λL_j à L_i avec $i \neq j$, ce que l'on note $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.

Théorème 57 (Effet des opérations élémentaires sur les solutions)

Les opérations élémentaires ne modifient pas les solutions d'un système linéaire.

Les opérations élémentaires ne modifient pas l'ensemble des solutions car elles transforment le système en un système équivalent :

- **Échanger deux lignes** ne change pas les équations du système, mais seulement leur ordre.
- **Multiplier une ligne par un réel non nul** ne change pas l'équation correspondante : une égalité est équivalente à celle obtenue en multipliant ses deux membres par un réel non nul.
- **Ajouter à une ligne un multiple d'une autre** conserve les solutions : toute solution du système initial vérifie la nouvelle équation, et l'opération inverse permet de retrouver l'équation initiale.

Ainsi, après chaque opération élémentaire, **l'ensemble des solutions reste inchangé**.

Exemple 58 Les solutions du système $\begin{cases} x+y=a \\ x-y=b \end{cases}$ sont données par la demi-somme et la demi-différence : $x = \dfrac{a+b}{2}$ et $y = \dfrac{a-b}{2}$.

Démonstration

On effectue des opérations élémentaires sur les lignes du système :

$$\begin{cases} x+y=a \\ x-y=b \end{cases} \iff \begin{cases} x+y=a \\ -2y=b-a \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \iff \begin{cases} x+y=a \\ y=\dfrac{a-b}{2} \end{cases} \quad L_2 \leftarrow -\frac{1}{2}L_2$$

$$\iff \begin{cases} x=\dfrac{a+b}{2} \\ y=\dfrac{a-b}{2} \end{cases} \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_2$$

■

Méthode (Pivot de Gauss) :

Considérons le système :

$$\begin{cases} x+2y-z+t=3 \\ 2x+y+3z-t=8 \\ x+y+z+2t=5. \end{cases}$$

- On commence par chercher un **pivot**, c'est-à-dire un coefficient non nul qui va nous permettre d'éliminer, dans les lignes suivantes, la variable correspondant à sa colonne. Ici, le coefficient de x dans la première ligne vaut 1 : c'est un pivot particulièrement pratique.
  On utilise ce pivot pour éliminer x dans les deux lignes suivantes :

Pivot / A éliminer

$$\begin{cases} x+2y-z+t=3 \\ 2x+y+3z-t=8 \\ x+y+z+2t=5 \end{cases} \iff \begin{cases} x+2y-z+t=3 \\ -3y+5z-3t=2 \\ -y+2z+t=2 \end{cases} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2-2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3-L_1 \end{matrix}$$

  On peut maintenant travailler avec une équation et une inconnue de moins. On cherche alors un pivot pour y et on répète le même procédé.
- Le coefficient de y vaut -3 dans la deuxième équation et -1 dans la troisième : ce dernier est un pivot plus pratique. On échange donc les deux dernières lignes, et on multiplie la nouvelle deuxième ligne par -1 pour obtenir un pivot

égal à 1 :

$$\begin{cases} x+ \ 2y- \ z+ \ t=3 \\ \quad -3y+5z-3t=2 \\ \quad -y+2z+ \ t=2 \end{cases} \iff \begin{cases} x+ \ 2y- \ z+ \ t=3 \\ \quad y-2z- \ t=-2 \\ \quad -3y+5z-3t=2 \end{cases} \quad L_2 \leftrightarrow L_3,\ L_2 \leftarrow -L_2\ .$$

Le coefficient 1 devant y constitue alors un bon pivot. On l'utilise pour éliminer y dans la troisième équation :

$$\begin{cases} x+2y- \ z+ \ t=3 \\ \quad y-2z- \ t=-2 \\ \quad -3y+5z-3t=2 \end{cases} \iff \begin{cases} x+2y- \ z+ \ t=3 \\ \quad y-2z- \ t=-2 \\ \quad -z-6t=-4 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_3+3L_2.$$

On a ainsi obtenu un **système échelonné**.

À ce stade, deux cas peuvent se présenter.
- Si une ligne de la forme $0=c$, avec $c \neq 0$, apparaît, le système est **incompatible**.
- Sinon, le système est **compatible**.

Ici le système est compatible. Cependant, il y a quatre inconnues pour seulement trois équations : une inconnue peut donc être choisie librement, on va la transformer en ce qu'on appelle un **paramètre** et ensuite effectuer une **remontée**.

$$\begin{cases} x+2y- \ z+ \ t= \ 3 \\ \quad y- \ 2z- \ t=-2 \\ \quad -z-6t=-4 \end{cases}$$

On exprime ces inconnues... ...en fonction de ces "paramètres"

$$\iff \begin{cases} x+2y- \ z=3-t \\ \quad y-2z=-2+t \\ \quad z=4-6t \end{cases} \quad L_3 \leftarrow -L_3$$

$$\iff \begin{cases} x+2y \ \ =7-7t \\ \quad y \ \ =6-11t \\ \quad z=4-6t \end{cases} \quad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1+L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2+2L_3 \end{matrix}$$

$$\iff \begin{cases} x=-5+15t \\ y=6-11t \\ z=4-6t \end{cases} \quad L_1 \leftarrow L_1-2L_2$$

$$\iff \exists\, \lambda \in \mathbb{R}, \quad (x,y,z,t)=(-5+15\lambda,\ 6-11\lambda,\ 4-6\lambda,\ \lambda)$$

$$\iff (x,y,z,t) \in (-5,6,4,0)+\mathrm{Vect}\big((15,-11,-6,1)\big).$$