SOMMES ET PRODUITS

I) SOMMES

Exercice 1 — Écrire à l'aide du symbole somme les sommes suivantes :

1) $2^3+2^4+\cdots+2^{12}$. 2) $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\cdots+\frac{10}{1024}$.

3) $2-4+6-8+\cdots+50$. 4) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}$.

Exercice 2 — Parmi les formules suivantes, lesquelles sont vraies ?

1) $\sum_{i=1}^{n}(\alpha+a_i)=\alpha+\sum_{i=1}^{n}a_i$, 2) $\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)=\sum_{i=1}^{n}a_i+\sum_{i=1}^{n}b_i$,

3) $\sum_{i=1}^{n}\alpha a_i=\alpha\sum_{i=1}^{n}a_i$, 4) $\sum_{i=1}^{n}a_ib_i=\sum_{i=1}^{n}a_i\sum_{i=1}^{n}b_i$,

5) $\left|\sum_{i=1}^{n}a_i\right|=\sum_{i=1}^{n}|a_i|$, 6) $\sum_{i=1}^{n}a_i^{\alpha}=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^{\alpha}$.

Exercice 3 — Montrer les formules suivantes par récurrence :

1) $\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$, 2) $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, 3) $\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Exercice 4 — Simplifier les sommes suivantes, où $x\in\mathbb{R}$:

1) $\sum_{i=0}^{n}i(i+1)$. 2) $\sum_{j=1}^{n}(1-4j)$. 3) $\sum_{k=0}^{n}(k+n)$. 4) $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k$.

5) $\sum_{i=1}^{n+1}\frac{2^i}{3^{2i-1}}$. 6) $\sum_{k=2}^{n}\ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$. 7) $\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}i$. 8) $\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}j$.

9) $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(i+j)$. 10) $\sum_{0\leqslant i,j\leqslant n}x^{i+j}$. 11) $\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\frac{i}{j+1}$. 12) $\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(j-i)$.

13) $\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\frac{i^2}{j}$. 14) $\sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ i+j=n}}ij$. 15) $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\max(i,j)$.

Exercice 5 —

1) Déterminer une expression explicite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0=1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$:
   a) $u_{n+1}=u_n+n$. b) $u_{n+1}=u_n+n^2-1$.
2) Déterminer une expression explicite de la famille $\left(z_{i,j}\right)_{i,j\in\mathbb{N}}$ définie pour tous $i,j\in\mathbb{N}$ par $z_{0,j}=1$ et $z_{i+1,j}=2^ij+z_{i,j}$.

Exercice 6 — Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout $k\in\mathbb{N}$,

$$\frac{1}{(3k+1)(3k+4)}=\frac{a}{3k+1}+\frac{b}{3k+4}.$$

En déduire la valeur de la somme $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(3k+1)(3k+4)}$.

Même question pour $S_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+3)}$.

Exercice 7 — Calculer la somme $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k$.

Exercice 8 — Calculer les sommes

1) $\sum_{k=1}^{n}k\cdot k!$, 2) $\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{(k+1)!}$, 3) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$.

Exercice 9 — Calculer la somme $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{n+1-k}\right)$.

Indication : Séparer la somme en deux, puis faire un changement d'indices dans la deuxième somme.

Exercice 10 — Étudier la monotonie des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}\qquad\text{et}\qquad v_n=\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k}.$$

Exercice 11 — Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Calculer $C_n=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(i+j)$ en remarquant

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(i+j)=2C_n+2\sum_{i=1}^{n}i.$$

Exercice 12 — On pose $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$ et $H_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

1) Montrer que $\frac{1}{k^2}\leqslant\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$ pour tout $k\geqslant 2$, puis que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
2) Montrer que $\sum_{k=1}^{2^n}\frac{1}{k}\geqslant\frac{n}{2}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, puis que $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$.

II) Produits

Exercice 13 — Parmi les formules suivantes, lesquelles sont vraies ?

1) $\prod_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\prod_{k=1}^{n}a_k+\prod_{k=1}^{n}b_k$, 2) $\prod_{k=1}^{n}\lambda a_k=\lambda\prod_{k=1}^{n}a_k$,

3) $\prod_{k=1}^{n}a_kb_k=\prod_{k=1}^{n}a_k\prod_{k=1}^{n}b_k$ 4) $\left|\prod_{k=1}^{n}a_k\right|=\prod_{k=1}^{n}|a_k|$,

5) ★ $\left(\prod_{k=1}^{n}a_k\right)^p=\prod_{k=1}^{n}a_k^p$ 6) ★★ $\prod_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=\sum_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{m}x_{ij}$.

Exercice 14 — Simplifier les produits suivants, où $x\in\mathbb{R}$, en les exprimant le plus possible à l'aide de puissances et de factorielles :

1) $\prod_{k=1}^{n}\sqrt{k(k+1)}$ 2) $\prod_{k=1}^{n}(-5)^{k^2-k}$ 3) $\prod_{k=1}^{n}\frac{4^k}{k^2}$

4) $\prod_{k=0}^{n}(2k)$ 5) $\prod_{k=0}^{n}(2k+1)$ 6) $\prod_{k=1}^{n}\left(4k^2-1\right)$

7) $\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}x^{i+j}$ 8) $\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}(2i)$ 9) $\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}i^j$

10) $\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}ij$ 11) $\prod_{p=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{p}x^{p!k}$ 12) $\prod_{k=0}^{n}\left(1+x^{2^k}\right)$

Exercice 15 — Calculer le produit $\prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k}$ avec des factorielles.

Exercice 16 — Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Calculer les produits suivants :

1) $\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2}{k}\right)$, 2) $\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$, 3) $\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{4k^2}\right)$.

Exercice 17 — Montrer sans récurrence que $2^{n-1}\leqslant n!\leqslant n^{n-1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

Exercice 18 — Montrer sans récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\prod_{k=0}^{n-1}\frac{n!}{k!}=\prod_{k=1}^{n}k^k$$

Exercice 19 ★ — Factoriser k^3-1 par $k-1$ et k^3+1 par $k+1$ pour tout $k\geqslant 2$, puis en déduire que $\prod_{k=2}^{+\infty}\frac{k^3-1}{k^3+1}=\frac{2}{3}$.

III) Coefficients binomiaux

Exercice 20 — Développer $(a+b+c)^n$.

Exercice 21 — Montrer que $\binom{2n}{n}$ est pair pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

Exercice 22 —

1) Simplifier pour tout $n\in\mathbb{N}$ la somme $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k$:
   a) grâce à la formule du capitaine.
   b) en dérivant de deux façons différentes la fonction $x\longmapsto(x+1)^n$.
2) Simplifier pour tout $n\in\mathbb{N}$ les sommes :
   a) $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k^2$. b) $\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}\binom{n}{k}$.

Exercice 23 — Calculer la somme $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(n-k)!(k+1)!}$.

Exercice 24 — Calculer, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$A_n=\sum_{0\leqslant 2k\leqslant n}\binom{n}{2k}\quad\text{et}\quad B_n=\sum_{0\leqslant 2k+1\leqslant n}\binom{n}{2k+1}.$$

On pourra commencer par calculer A_n+B_n.

Exercice 25 — a) Montrer, pour tout $(n,k,i)\in\mathbb{N}^3$, tel que $k\leqslant i\leqslant n$:

$$\binom{n}{i}\binom{i}{k}=\binom{n}{k}\binom{n-k}{n-i}.$$

b) En déduire, pour tout $n\in\mathbb{N}$, la valeur de $S_n=\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i}\binom{i}{k}$.

Exercice 26 — Pour $n\in\mathbb{N}$, calculer

$$\sum_{0\leqslant p\leqslant q\leqslant n}\binom{q}{p}$$

Exercice 27 — Montrer, pour tout $(n,p)\in\mathbb{N}^2$ tel que $n\geqslant p$: $\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p}=\binom{n+1}{p+1}$.