RELATIONS BINAIRES ET APPLICATIONS

Dans tout le chapitre, $E, F, G, \dots$ désignent des ensembles quelconques.

INTRODUCTION

On dispose déjà de nombreuses relations entre objets mathématiques : l'égalité, l'inclusion, la divisibilité, la comparaison $\leqslant$ sur $\mathbb{R}$... Toutes ces relations partagent des propriétés communes (réflexivité, transitivité...) que l'on va isoler.

On dégage ainsi deux grandes familles de relations : les **relations d'équivalence**, qui permettent de « regrouper » les éléments d'un ensemble qui se ressemblent, et les **relations d'ordre**, qui permettent de les comparer.

On formalisera également quelques notions fondamentales sur les **applications**, notamment les notions d'application **injective**, **surjective** et **bijective**.

Table des matières

I Relations binaires **1**
- A - Premières définitions . . . 1
- B - Relations d'équivalence . . . 2
- C - Relations d'ordre . . . 4

II Applications **4**
- A - Généralités . . . 4
- B - Composition de fonctions . . . 5
- C - Indicatrice d'une partie . . . 6
- D - Image et image réciproque . . . 7

III Injections, surjections, bijections **9**
- A - Injections . . . 9
- B - Surjections . . . 10
- C - Bijections, réciproques . . . 11

I) RELATIONS BINAIRES

A - PREMIÈRES DÉFINITIONS

Définition 1 (Relation binaire)

On appelle **relation binaire** sur E toute partie de $E \times E$.
Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire. Pour $x, y \in E$, on écrit $x\mathcal{R}y$ lorsque $(x, y) \in \mathcal{R}$, on dit alors que x **est en relation avec** y.

Exemple 2 Voici des relations binaires que vous connaissez déjà :
- La relation d'égalité $=$ sur E.
- Les relations $\leqslant$ et $<$ sur $\mathbb{R}$.
- La relation d'inclusion sur $\mathcal{P}(E)$.
- La relation de divisibilité $\mid$ sur $\mathbb{Z}$: $a \mid b \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \quad b = ka$.
- La relation de congruence modulo α, notée $\equiv\ [\alpha]$, sur $\mathbb{R}$: $x \equiv y\ [\alpha] \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \quad x = y + k\alpha$.
- La relation $\leqslant$ sur $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ définie par : $f \leqslant g \iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \leqslant g(x)$.

Définition 3 (Propriétés des relations binaires)

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E. On dit que $\mathcal{R}$ est :

réflexive si : $\forall x \in E, \quad x\mathcal{R}x$;
symétrique si : $\forall x, y \in E, \quad x\mathcal{R}y \implies y\mathcal{R}x$;
antisymétrique si : $\forall x, y \in E, \quad (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x) \implies x = y$;
transitive si : $\forall x, y, z \in E, \quad (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \implies x\mathcal{R}z$.

Exemple 4

- La relation d'égalité $=$ sur E est réflexive, transitive, symétrique et antisymétrique.
- Les relations $\leqslant$ sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ sont réflexives, transitives et antisymétriques. Elles ne sont pas symétriques.
- La relation $<$ sur $\mathbb{R}$ est transitive et antisymétrique, mais elle n'est ni réflexive, ni symétrique.
- La relation « avoir le même signe » sur $\mathbb{R}^*$ est réflexive, transitive et symétrique.
- La relation d'inclusion $\subset$ sur $\mathcal{P}(E)$ est réflexive, transitive et antisymétrique.
- Sur $\mathbb{N}$, la divisibilité $\mid$ est réflexive, antisymétrique et transitive.
- Sur $\mathbb{Z}$, la divisibilité $\mid$ est réflexive et transitive, mais pas antisymétrique. Par exemple, $2 \mid -2$, $-2 \mid 2$ alors que $2 \neq -2$.
- Sur $\mathbb{Z}$, la relation de congruence modulo n (avec $n \in \mathbb{N}^*$ fixé) est réflexive, symétrique et transitive.

Démonstration

On démontre uniquement les propriétés de la divisibilité.

- **Réflexivité :** Pour tout $a \in \mathbb{Z}$, on a $a \mid a$ car $a = a \times 1$ avec $1 \in \mathbb{Z}$.
- **Transitivité :** Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Si $a \mid b$ et $b \mid c$, alors $b = ak$ et $c = b\ell$ pour certains $k, \ell \in \mathbb{Z}$. Ainsi, $c = a(k\ell)$ avec $k\ell \in \mathbb{Z}$, donc $a \mid c$.
- **Antisymétrie :** Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. Montrons tout d'abord que $a \mid b$ et $b \mid a$ si et seulement si $|a| = |b|$. Il en découlera que la relation $\mid$ est antisymétrique sur $\mathbb{N}$, mais pas sur $\mathbb{Z}$.
  Supposons d'abord que $|a| = |b|$. Alors $a = b$ ou $a = -b$. Dans les deux cas, $a \mid b$ et $b \mid a$.
  Réciproquement, supposons que $a \mid b$ et $b \mid a$. Il existe alors $k, \ell \in \mathbb{Z}$ tels que $b = ak$ et $a = b\ell$. Ainsi, $b = b(k\ell)$.
  - Si $b = 0$, alors $a = b\ell = 0$, donc $|a| = |b|$.
  - Si $b \neq 0$, alors $k\ell = 1$. Comme $k, \ell \in \mathbb{Z}$, on a nécessairement $k = \ell = 1$ ou $k = \ell = -1$. Ainsi $a = b$ ou $a = -b$, d'où $|a| = |b|$.

  Dans tous les cas, on a bien $|a| = |b|$.

Ainsi, la divisibilité est réflexive, transitive et antisymétrique sur $\mathbb{N}$, mais elle n'est pas antisymétrique sur $\mathbb{Z}$. ■

⚠ Une relation peut n'être ni symétrique ni antisymétrique (c'est le cas de $\mid$ sur $\mathbb{Z}$). La symétrie et l'antisymétrie ne sont PAS des négations l'une de l'autre.

B - Relations d'équivalence

Définition 5 (Relation d'équivalence)

Une relation binaire sur E est une **relation d'équivalence** si elle est réflexive, symétrique et transitive. Les relations d'équivalences sont généralement notées $\sim$, $\simeq$, etc.

Exemple 6

- L'égalité est une relation d'équivalence sur tout ensemble.
- La relation « avoir le même signe » sur $\mathbb{R}^*$ est une relation d'équivalence, de même que la relation d'égalité $=$ sur E pour tout ensemble E.
- La congruence modulo α est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.

Démonstration

Montrons uniquement que la congruence modulo α définit une relation d'équivalence.

- **Réflexivité :** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x = x + 0 \times \alpha$ avec $0 \in \mathbb{Z}$, donc $x \equiv x\,[\alpha]$.
- **Transitivité :** Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$. Si $x \equiv y\,[\alpha]$ et $y \equiv z\,[\alpha]$, alors $x = y + k\alpha$ et $y = z + \ell\alpha$ pour certains $k, \ell \in \mathbb{Z}$. Ainsi, $x = z + (k + \ell)\alpha$ avec $k + \ell \in \mathbb{Z}$, donc $x \equiv z\,[\alpha]$.
- **Symétrie :** Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Si $x \equiv y\,[\alpha]$, alors $x = y + k\alpha$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$. On a alors $y = x + (-k)\alpha$ avec $-k \in \mathbb{Z}$, donc $y \equiv x\,[\alpha]$. ■

Définition 7 (Classe d'équivalence)

Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur E et soit $x \in E$. On appelle **classe d'équivalence** de x l'ensemble

$$\mathrm{cl}(x) = \overline{x} = \{y \in E \mid x \sim y\}.$$

L'ensemble des classes d'équivalence est appelé **ensemble quotient** de E par $\sim$ et noté $E/\sim$.

Proposition 8 (Propriétés des classes d'équivalence)

Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur E. Pour tous $x, y \in E$:

(i) $x \in \overline{x}$ (en particulier $\overline{x} \neq \varnothing$) ;

(ii) $x \sim y \iff \overline{x} = \overline{y}$;

(iii) $\overline{x} \cap \overline{y} \neq \varnothing \iff \overline{x} = \overline{y}$.

Ainsi, deux classes d'équivalence sont soit égales, soit disjointes.

Démonstration

(i) Par réflexivité, $x \sim x$, donc $x \in \overline{x}$.

(ii) $\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons $x \sim y$. Soit $z \in \overline{x}$, c'est-à-dire $x \sim z$. Par symétrie, $y \sim x$, et par transitivité (avec $y \sim x$ et $x \sim z$), $y \sim z$, donc $z \in \overline{y}$. Ainsi $\overline{x} \subset \overline{y}$, et le rôle de x et y étant symétrique (car $y \sim x$), on a de même $\overline{y} \subset \overline{x}$. D'où $\overline{x} = \overline{y}$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Réciproquement, si $\overline{x} = \overline{y}$, alors $x \in \overline{x} = \overline{y}$, donc $x \sim y$.

(iii) $\boxed{\Longrightarrow}$ Si $\overline{x} \cap \overline{y} \neq \varnothing$, soit $z \in \overline{x} \cap \overline{y}$, c'est-à-dire $x \sim z$ et $y \sim z$. Par symétrie et transitivité, $x \sim y$, donc $\overline{x} = \overline{y}$ d'après (ii).

$\boxed{\Longleftarrow}$ Réciproquement, si $\overline{x} = \overline{y}$, alors $\overline{x} \cap \overline{y} = \overline{x} \neq \varnothing$ d'après (i). ■

On rappelle la définition d'une partition.

Définition 9 (Partition)

Soit E un ensemble. Une **partition** de E est une famille $(A_i)_{i \in I}$ de parties de E telle que :

- les A_i sont deux à deux disjoints : $\forall i, j \in I,\ i \neq j \implies A_i \cap A_j = \varnothing$;
- $E = \bigcup_{i \in I} A_i$;
- $\forall i \in I,\quad A_i \neq \varnothing$.

Proposition 10 (Lien entre relations d'équivalence et partitions)

Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur E. L'ensemble des classes d'équivalence $E/\sim$ forme une partition de E. Réciproquement, si $(A_i)_{i \in I}$ est une partition de E, la relation $\sim$ définie par

$$x \sim y \iff \exists i \in I,\quad x \in A_i \text{ et } y \in A_i$$

est une relation d'équivalence sur E dont les classes sont exactement les A_i.

Démonstration

- Les classes d'équivalence sont non vides, deux à deux disjointes ou égales d'après la proposition précédente, et leur réunion vaut E car tout $x \in E$ appartient à $\overline{x}$. C'est donc bien une partition de E.
- Réciproquement, soit $(A_i)_{i \in I}$ une partition de E et $\sim$ la relation associée.
  - $\sim$ est réflexive : pour tout $x \in E$, il existe $i \in I$ tel que $x \in A_i$ (par définition d'une partition), donc $x \sim x$.
  - $\sim$ est symétrique par définition.
  - $\sim$ est transitive : si $x \sim y$ via A_i et $y \sim z$ via A_j, alors $y \in A_i \cap A_j$, donc $A_i = A_j$ car les A_i sont deux à deux disjoints. Ainsi $x, z \in A_i$, donc $x \sim z$. ■

Cette proposition signifie que « se donner une relation d'équivalence sur E, c'est se donner une partition de E ». C'est la manière la plus naturelle de construire des relations d'équivalence.

Exemple 11 Notons $\mathcal{S}$ la relation d'équivalence « avoir le même signe » sur $\mathbb{R}^*$. Tout réel non nul a le même signe que 1 ou le même signe que -1. De plus, 1 et -1 n'ont pas le même signe. Ainsi, $\mathcal{S}$ possède exactement deux classes d'équivalence :

$$\mathbb{R}_+^* \qquad \text{et} \qquad \mathbb{R}_-^*.$$

L'ensemble $\{1, -1\}$ constitue donc un système de représentants des classes d'équivalence. Par conséquent, $\mathbb{R}^*/\mathcal{S} = \left\{\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}_-^*\right\}$.

Exemple 12 Pour la congruence modulo n sur $\mathbb{Z}$, la classe de $x \in \mathbb{Z}$ est $\overline{x} = x + n\mathbb{Z}$. L'ensemble quotient est noté $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et possède exactement n éléments : $\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{n-1}$.

Démonstration

Soit $x \in \mathbb{Z}$. Par définition, $\overline{x} = x + n\mathbb{Z} = \{x + nk \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
D'après la division euclidienne, il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{Z} \times \{0, \dots, n-1\}$ tel que $x = nq + r$. Ainsi, $x - r = nq \in n\mathbb{Z}$, donc $\overline{x} = \overline{r}$. Par conséquent, toute classe de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est égale à l'une des classes $\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{n-1}$.
Par unicité du reste dans la division euclidienne, ces classes sont deux à deux distinctes. Ainsi, toute classe de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est représentée par exactement une d'entre elles :

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{n-1}\} \qquad \text{et} \qquad |\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}| = n. \qquad \blacksquare$$

C - Relations d'ordre

Définition 13 (Relation d'ordre)

- Une relation binaire sur E est une **relation d'ordre** si elle est réflexive, antisymétrique et transitive.
  On note en général $\leqslant$ ou $\preccurlyeq$ une relation d'ordre générique.
- On dit qu'une relation d'ordre $\preccurlyeq$ est un **ordre total** si

$$\forall x, y \in E, \quad x \preccurlyeq y \text{ ou } y \preccurlyeq x,$$

  c'est-à-dire si deux éléments quelconques de E sont toujours comparables. Sinon, on dit que l'ordre est **partiel**.

Exemple 14

- $(\mathbb{R}, \leqslant)$ et $(\mathbb{N}, \leqslant)$ sont des ensembles totalement ordonnés.
- $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \leqslant)$ est un ensemble partiellement ordonné.
- $(\mathbb{N}^*, |)$ est un ensemble partiellement ordonné : par exemple, 2 et 3 ne sont pas comparables pour $|$.
- La relation $|$ ne définit pas une relation d'ordre sur $\mathbb{Z}$, faute d'antisymétrie (cf. plus haut).
- $(\mathcal{P}(E), \subset)$ est un ensemble partiellement ordonné dès que $\text{Card}(E) \geq 2$.

II) Applications

A - Généralités

Définition 15 (Application)

- **Application/fonction :** On appelle **application** (ou **fonction**) de E dans F toute partie de $E \times F$ telle que :

$$\forall x \in E, \exists! \, y \in F, \quad (x, y) \in f.$$

  Etant donné que dans la définition un tel y est unique, on note $y = f(x)$ plutôt que $(x, y) \in f$.
  On appelle **graphe** de f l'ensemble $\{(x, f(x)),\ x \in E\}$.
- **Ensemble de définition/d'arrivée :** L'ensemble E est appelé l'**ensemble de définition** de f et l'ensemble F est appelé l'**ensemble d'arrivée** de f.
- **Image/Antécédent :** Pour $x \in E$ et $y \in F$, lorsque $y = f(x)$ on dit que y est **l'image** de x par f et que x est UN **antécédent** de y par f.

Une fonction est son graphe. Les termes « applications » et « fonctions » sont les mêmes conformément au programme.

Définition 16 (Fonction identité)

La fonction $f : x \longmapsto x$ définie de E dans E est appelée la **fonction identité**.

Définition 17 (Ensemble d'applications)

L'ensemble des applications de E dans F est noté F^E ou $\mathcal{F}(E, F)$.

Exemple 18 L'ensemble $\{0,1\}^{\{1,2\}}$ des applications de $\{1,2\}$ dans $\{0,1\}$ est de cardinal 4 et ses éléments sont les applications :

$$\begin{cases} 1 \longmapsto 0 \\ 2 \longmapsto 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 1 \longmapsto 0 \\ 2 \longmapsto 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 1 \longmapsto 1 \\ 2 \longmapsto 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} 1 \longmapsto 1 \\ 2 \longmapsto 1. \end{cases}$$

Définition 19 (Famille d'éléments)

Soit I un ensemble. On appelle **famille (d'éléments)** de E indexée par I toute application $I \longrightarrow E$. Une famille est plutôt notée de la forme $(x_i)_{i\in I}$. L'ensemble des familles de E indexée par I est noté E^I.

Exemple 20 Dans le cas fini, une famille $(x_1,\dots,x_n)$ d'éléments de E peut donc être vue à la fois comme un élément de E^n et comme l'application

$$\begin{cases} [\![1;n]\!] & \longrightarrow E \\ i & \longmapsto x_i \end{cases},$$

qui est un élément de $E^{[\![1;n]\!]}$. C'est d'ailleurs ce qui explique que, pour des ensembles E et F, on note F^E l'ensemble des applications de E dans F : l'ensemble de départ apparaît en exposant. Cela vient aussi du fait que, lorsque E et F sont finis, le nombre d'applications de E dans F est $|F|^{|E|}$, comme le suggère la notation F^E.

Exemple 21 Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille de $\mathbb{R}$ indexée par $\mathbb{N}$, c'est-à-dire un élément de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Définition 22 (Restriction, Prolongement)

Soit A une partie de E.

- **Restriction :** Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. On appelle **restriction** de f à A l'application $f_{|A} : A \longrightarrow F$ telle que $\forall x \in A,\ f_{|A}(x) = f(x)$.
- **Prolongement :** Soit $f : A \longrightarrow F$ une application. On appelle **prolongement** de f à E toute application $g : E \longrightarrow F$ telle que $f = g_{|A}$.

Il n'y a qu'une seule façon de restreindre à un ensemble, mais une infinité de façons de prolonger une fonction ! On parle donc bien d'UN prolongement.

Exemple 23 La fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \begin{cases} \ln x & \text{si } x > 0 \\ x^2 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$, est un prolongement de ln et ln est une restriction de f.

En général, lorsqu'on prolonge une fonction, on cherche à conserver certaines de ses propriétés, comme sa continuité.

Exemple 24 (Prolongement par continuité de $x\ln x$) La fonction $g : x \longmapsto x\ln x$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} x\ln x = 0$, la fonction

$$\tilde{g} : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \begin{cases} x\ln x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{cases}$$

est un prolongement de g à $\mathbb{R}_+$, continu en 0 : c'est le **prolongement par continuité** de g.

B - Composition de fonctions

Définition 25 (Composition)

Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications. On appelle **composée** de f suivie de g l'application

$$g\circ f : \begin{cases} E & \longrightarrow G \\ x & \longmapsto g(f(x)). \end{cases}$$

En général, la composition n'est possible que dans un sens. Lorsque les deux sens sont possibles, ils donnent en général des fonctions bien différentes ! En d'autres termes, la composition n'est PAS commutative.

Exemple 26 Notons $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto x^2 \end{cases}$ et $g : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto e^x \end{cases}$. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g\circ f(x) = e^{x^2} \qquad \text{et} \qquad f\circ g(x) = e^{2x}$$

En pratique

Pour trouver le domaine de définition d'une composée : $x \in \mathrm{Dom}(g \circ f) \iff x \in \mathrm{Dom}(f)$ et $f(x) \in \mathrm{Dom}(g)$.

Exemple 27 Le domaine de définition de $\sqrt{x^2-3x+2}$ est $]-\infty,1] \cup [2,+\infty[$.

Démonstration

La quantité $\sqrt{x^2-3x+2}$ est définie si et seulement si $x^2-3x+2 \geq 0$. Or $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$, donc $(x-1)(x-2) \geq 0$ si et seulement si $x \leqslant 1$ ou $x \geq 2$. Ainsi, le domaine de définition est $]-\infty,1] \cup [2,+\infty[$. ■

Exemple 28 Le domaine de définition de $\ln(\sqrt{x^2-1}-1)$ est $]-\infty,-\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2},+\infty[$.

Démonstration

La quantité $\ln(\sqrt{x^2-1}-1)$ est définie si et seulement si $x^2-1 \geq 0$ et $\sqrt{x^2-1}-1>0$.

- La condition $x^2-1 \geq 0$ donne $x \leqslant -1$ ou $x \geq 1$, soit $x \in]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$.
- Soit $x \in]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$. On a

$$\sqrt{x^2-1}-1>0 \iff \sqrt{x^2-1}>1 \iff x^2-1>1 \iff x^2>2 \iff x<-\sqrt{2} \text{ ou } x>\sqrt{2}.$$

La deuxième équivalence est valable car les deux membres $\sqrt{x^2-1}$ et 1 sont positifs.

Ainsi, les deux conditions sont simultanément vérifiées si et seulement si $x \in]-\infty,-\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2},+\infty[$. Le domaine de définition est donc $]-\infty,-\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2},+\infty[$. ■

Proposition 29 (Propriétés de la composition)

- **Associativité :** La composition est associative. Pour toutes fonctions $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$ et $h : G \longrightarrow H$,
$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$
- **Neutralité de l'identité :** Pour toute fonction $f : E \longrightarrow F$: $\mathrm{Id}_F \circ f = f \circ \mathrm{Id}_E$.

Démonstration

- Soit $x \in E$. On a :
$$\big(h \circ (g \circ f)\big)(x) = h\big((g \circ f)(x)\big) = h(g(f(x))) \quad \text{et} \quad \big((h \circ g) \circ f\big)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))).$$
Les deux fonctions coïncident en tout $x \in E$, donc sont égales.
- Soit $x \in E$. On a : $\big(\mathrm{Id}_F \circ f\big)(x) = \mathrm{Id}_F(f(x)) = f(x)$ et $\big(f \circ \mathrm{Id}_E\big)(x) = f(\mathrm{Id}_E(x)) = f(x)$. ■

Définition 30 (Itérées)

Soit $f : E \longrightarrow E$ une application. On pose $f^{\circ 0} = \mathrm{Id}_E$ et $f^{\circ n} = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ termes}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

L'application $f^{\circ n}$ est appelée l'itérée n$^{\text{ème}}$.

C - Indicatrice d'une partie

L'indicatrice d'un ensemble permet de traduire une appartenance en une valeur : elle vaut 1 lorsque l'élément appartient à l'ensemble et 0 lorsqu'il n'y appartient pas.

Définition 31 (Indicatrice d'une partie)

Soit $A \subset E$. On appelle **indicatrice de** A la fonction $\mathbf{1}_A : \begin{cases} E & \longrightarrow \{0,1\} \\ x & \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$.

Exemple 32 $\mathbf{1}_\varnothing$ est la fonction nulle sur E et $\mathbf{1}_E$ est la fonction constante égale à 1 sur E.

Proposition 33 (Quelques propriétés sur l'indicatrice)

(i) **Inclusion :** $A \subset B \iff \mathbf{1}_A \leqslant \mathbf{1}_B$.
(ii) **Égalité :** $A = B \iff \mathbf{1}_A = \mathbf{1}_B$.
(iii) **Complémentaire :** $\mathbf{1}_{\bar{A}} = 1 - \mathbf{1}_A$.
(iv) **Intersection :** $\mathbf{1}_{A \cap B} = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$.
(v) **Réunion :** $\mathbf{1}_{A \cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$.

Démonstration

(i) **Inclusion.** Soit $x \in E$.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons $A \subset B$. Pour tout $x \in E$,

- ▷ si $x \in A$, alors $\mathbf{1}_A(x) = 1 \leqslant 1 = \mathbf{1}_B(x)$ puisque $x \in B$;
- ▷ si $x \notin A$, alors $\mathbf{1}_A(x) = 0 \leqslant \mathbf{1}_B(x)$.

Ainsi $\mathbf{1}_A \leqslant \mathbf{1}_B$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons $\mathbf{1}_A \leqslant \mathbf{1}_B$. Pour tout $x \in E$, si $x \in A$, alors $\mathbf{1}_A(x) = 1 \leqslant \mathbf{1}_B(x)$, donc $\mathbf{1}_B(x) = 1$ et ainsi $x \in B$. Finalement, $A \subset B$.

(ii) **Égalité.** Pour tous $A, B \subset E$,

$$A = B \iff A \subset B \text{ et } B \subset A \iff \mathbf{1}_A \leqslant \mathbf{1}_B \text{ et } \mathbf{1}_B \leqslant \mathbf{1}_A \iff \mathbf{1}_A = \mathbf{1}_B.$$

(iii) **Complémentaire.** Soit $x \in E$.

- Si $x \in A$, alors $\mathbf{1}_A(x) + \mathbf{1}_{\overline{A}}(x) = 1 + 0 = 1$.
- Si $x \notin A$, alors $\mathbf{1}_A(x) + \mathbf{1}_{\overline{A}}(x) = 0 + 1 = 1$.

Ainsi $\mathbf{1}_A + \mathbf{1}_{\overline{A}} = 1$, donc $\mathbf{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbf{1}_A$.

(iv) **Intersection.** Soit $x \in E$.

- Si $x \in A \cap B$, alors $\mathbf{1}_A(x) = \mathbf{1}_B(x) = 1$, donc $\mathbf{1}_{A\cap B}(x) = 1 = \mathbf{1}_A(x)\mathbf{1}_B(x)$.
- Si $x \notin A \cap B$, alors $x \notin A$ ou $x \notin B$, donc $\mathbf{1}_A(x) = 0$ ou $\mathbf{1}_B(x) = 0$. Ainsi $\mathbf{1}_{A\cap B}(x) = 0 = \mathbf{1}_A(x)\mathbf{1}_B(x)$.

Finalement, $\mathbf{1}_{A\cap B} = \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B$.

(v) **Réunion.** On a $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$. Ainsi,

$$\mathbf{1}_{A\cup B} = 1 - \mathbf{1}_{\overline{A}\cap\overline{B}} = 1 - \mathbf{1}_{\overline{A}}\mathbf{1}_{\overline{B}} = 1 - (1 - \mathbf{1}_A)(1 - \mathbf{1}_B) = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B. \qquad \blacksquare$$

D - Image et image réciproque

Définition 34 (Image d'une application)

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

- **À valeurs dans :** Soit B une partie de F. On dit que f est **à valeurs dans** B si $\operatorname{Im} f \subset B$.
- **Image :** Pour toute partie A de E, on appelle **image (directe)** de A par f l'ensemble des images par f des éléments de A :

$$f(A) = \{y \in F \mid \exists a \in A,\ y = f(a)\} = \{f(a)\}_{a\in A}.$$

On définit également l'**image** de f par $\operatorname{Im} f = f(E)$.

Exemple 35

- La fonction $f : x \longmapsto e^x$ définie sur $\mathbb{R}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}$, son image est $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}_+^*$.
- La fonction cos est à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou encore dans $[-2, 10[$. L'image de cos est $[-1, 1]$.
- Soit $A \subset E$. La fonction $f : X \longmapsto X \cap A$ définie sur $\mathcal{P}(E)$ est à valeurs dans $\mathcal{P}(E)$. son image est $\operatorname{Im} f = \mathcal{P}(A)$.

Exemple 36 La fonction cos est à valeurs dans $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $[-2, 10[$ également. L'image de cos est $[-1, 1]$.

L'inclusion suivante mérite d'être bien comprise : les valeurs prises par $g \circ f$ sont des valeurs prises par g.

Exemple 37 Pour toutes applications $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$, $\quad \operatorname{Im}(g \circ f) \subset \operatorname{Im}(g)$.

Démonstration

Soit $z \in \operatorname{Im}(g \circ f)$. Il existe $x \in E$ tel que $z = g(f(x))$. En posant $y = f(x) \in F$, on a $z = g(y) \in \operatorname{Im} g$. $\blacksquare$

Définition 38 (Image réciproque)

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Pour toute partie B de F, on appelle **image réciproque** de B par f l'ensemble des éléments de E dont l'image par f appartient à B :

$$f^{\leftarrow}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\} \quad \text{(Notation temporaire).}$$

En particulier, l'équivalence suivante est très importante : $\quad x \in f^{\leftarrow}(B) \iff f(x) \in B$.

Exemple 39

- L'image réciproque de $[9, +\infty[$ par la fonction $x \longmapsto x^2$ est l'ensemble $]-\infty, -3] \cup [3, +\infty[$.
- $\cos^{\leftarrow}(\{0\}) = \dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$

Proposition 40 (Propriétés des images directes et réciproques)

Soient $f : E \longrightarrow F$ une application, $\{A_i\}_{i\in I}$ un ensemble de parties de E et $\{B_j\}_{j\in J}$ un ensemble de parties de F.

(i) **Images réciproques :**

$$f^{\leftarrow}\left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{j\in J} f^{\leftarrow}(B_j) \quad \text{et} \quad f^{\leftarrow}\left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcap_{j\in J} f^{\leftarrow}(B_j)$$

(ii) **Images directes :**

$$f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i) \quad \text{et} \quad f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i)$$

L'inclusion réciproque n'est pas vraie en général. Elle est vraie si f est injective.

Démonstration

(i) Soit $x \in E$. On a, par équivalences successives,

$$x \in f^{\leftarrow}\left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) \iff f(x) \in \bigcup_{j\in J} B_j \iff \exists j \in J,\ f(x) \in B_j$$
$$\iff \exists j \in J,\ x \in f^{\leftarrow}(B_j) \iff x \in \bigcup_{j\in J} f^{\leftarrow}(B_j).$$

Le raisonnement est identique pour l'intersection, en remplaçant $\exists$ par $\forall$.

(ii) • On raisonne par double inclusion.

$\subset$ Soit $y \in f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)$. Alors il existe $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$ tel que $y = f(x)$. Il existe donc $i \in I$ tel que $x \in A_i$, d'où $y \in f(A_i)$ et ainsi $y \in \bigcup_{i\in I} f(A_i)$.

$\supset$ Supposons $y \in \bigcup_{i\in I} f(A_i)$. Il existe alors $i \in I$ et $x \in A_i$ tels que $y = f(x)$. Comme $A_i \subset \bigcup_{i\in I} A_i$, on a $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$, donc $y \in f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)$.

• Soit $y \in f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)$, alors il existe $x \in \bigcap_{i\in I} A_i$ tel que $y = f(x)$. Or $x \in A_i$ pour tout $i \in I$, donc $y = f(x) \in f(A_i)$ pour tout $i \in I$. Ainsi $y \in \bigcap_{i\in I} f(A_i)$. ■

Exemple 41 (Contre-exemple à l'égalité pour les images directes) Soient $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto x^2 \end{cases}$, $A_1 = \{-1\}$ et $A_2 = \{1\}$.

Alors $A_1 \cap A_2 = \varnothing$ donc $f(A_1 \cap A_2) = \varnothing$, mais $f(A_1) \cap f(A_2) = \{1\} \cap \{1\} = \{1\} \neq \varnothing$.

L'inclusion $f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i)$ est donc bien stricte ici : f n'est pas injective.

Définition 42 (Point fixe, partie stable)

Soit $f : E \longrightarrow E$ une application.

- **Point fixe :** On dit que $x \in E$ est un point **fixe de** f si $f(x) = x$.
- **Partie stable :** Soit $A \subset E$. On dit que A est **stable par** f si $f(A) \subset A$.

Exemple 43 Les ensembles $[0,1]$ et $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ sont stables par $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto x^2 \end{cases}$.

Exemple 44

- $\mathbb{Z}$ est stable par $n \longmapsto n-1$, car $n-1 \in \mathbb{Z}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, tandis que $\mathbb{N}$ n'est pas stable par cette application, car $0 \in \mathbb{N}$ mais $0-1 = -1 \notin \mathbb{N}$.
- $\mathbb{N}$ est stable par $n \longmapsto 2^n$, car $2^n \in \mathbb{N}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, tandis que $\mathbb{Z}$ n'est pas stable par cette application, car $-1 \in \mathbb{Z}$ mais $2^{-1} = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$.

III) Injections, surjections, bijections

A - Injections

Définition 45 (Injection)

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. On dit que f est **injective** sur E ou que c'est une **injection** sur E si :

$$\forall x, x' \in E,\ f(x) = f(x') \implies x = x' \qquad \text{ou, par contraposée} \qquad \forall x, x' \in E,\ x \neq x' \implies f(x) \neq f(x').$$

Autrement dit, tout élément de F possède au plus un antécédent dans E par f.

La notion d'injectivité répond à la question suivante : si x est un élément mystérieux, que je calcule $f(x)$ et que j'en connais la valeur, puis-je retrouver x ? En général, non. Par exemple, si $f : x \longmapsto x^2$ et que $f(x) = 4$, on ne peut pas savoir si $x = 2$ ou $x = -2$: ces deux nombres ont la même image. Lorsque f est injective, en revanche, chaque élément de F possède au plus un antécédent, ce qui permet de remonter de l'image vers l'antécédent. Autrement dit, pour une application injective, l'égalité $f(x) = f(x')$ permet de conclure $x = x'$.

Exemple 46 La fonction $\begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto e^x \end{cases}$ est injective (sur $\mathbb{R}$).

Démonstration

Soient $x, x' \in \mathbb{R}$. Si $e^x = e^{x'}$, alors, en composant par ln, on obtient $x = x'$. ■

Exemple 47 La fonction $x \longmapsto \dfrac{x}{x-1}$ est injective (sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$).

Démonstration

Soient $x, x' \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ tels que $\dfrac{x}{x-1} = \dfrac{x'}{x'-1}$. Alors $x(x'-1) = x'(x-1)$ donc, après développement, $x = x'$. ■

En pratique

Pour montrer qu'une application n'est pas injective, on exhibe deux éléments différents qui ont la même image par f.

Exemple 48 La fonction $x \longmapsto x^2$ n'est pas injective sur $\mathbb{R}$ mais l'est sur $\mathbb{R}_+$.

Démonstration

- Elle n'est pas injective sur $\mathbb{R}$ car $(-1)^2 = 1^2 = 1$.
- Soient $x, x' \in \mathbb{R}_+$ tels que $x^2 = x'^2$. Alors, $x = x'$ ou $x = -x'$. Par positivité, on en déduit que $x = x'$. ■

Exemple 49 L'application $f : (x, y) \longmapsto x + y$ n'est pas injective mais $g : (x, y) \longmapsto (x + y, x - y)$ l'est.

Démonstration

(i) $f(1, -1) = f(0, 0)$, donc f n'est pas injective.

(ii) Soient $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$. Si $\begin{cases} x + y = x' + y' \\ x - y = x' - y', \end{cases}$ alors, par demi-somme et demi-différence : $\begin{cases} x = x' \\ y = y'. \end{cases}$ ■

Proposition 50 (Composition et injections)

Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications.

(i) Si f et g sont injectives alors $g \circ f$ l'est aussi.

(ii) Si $g \circ f$ est injective alors f l'est aussi.

⚠ Dans l'assertion (ii), la fonction g n'a aucune raison d'être injective. Par exemple, considérons $f : x \longmapsto e^x$ et $g : x \longmapsto x^2$. Alors, la fonction $g \circ f : x \longmapsto \exp(2x)$ est injective alors que g ne l'est pas.
Le fait que $g \circ f$ soit injective impose seulement que g soit injective sur l'image de f.

Démonstration

(i) Soient $x, y \in E$ tels que $g \circ f(x) = g \circ f(y)$.
On a $g(f(x)) = g(f(y))$. Comme g est injective, on obtient $f(x) = f(y)$ et comme f est injective on obtient $x = y$. Donc $g \circ f$ est injective.

(ii) Soient $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$. En composant par g, il vient : $g(f(x)) = g(f(y))$ et en utilisant l'injectivité de $g \circ f$ on obtient $x = y$. Finalement, la fonction f est injective.

Voici une deuxième démonstration basée sur la réflexion suivante :

« comment s'assurer que $g \circ f(x) \neq g \circ f(x')$ pour tous $x \neq x'$, si ce n'est même pas le cas pour f ? »

Si f n'est pas injective, alors soient $x \neq x'$ tels que $f(x) = f(x')$. On a alors $g(f(x)) = g(f(x'))$, donc $g \circ f$ n'est pas non plus injective. ■

Proposition 51 (Injectivité et stricte monotonie)

On suppose que E est une partie de $\mathbb{R}$. Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Si f est strictement monotone, alors f est injective.

Démonstration

Supposons f strictement croissante et montrons que f est injective.
Soient $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$. Si $x < x'$, alors $f(x) < f(x')$ par stricte croissance de f, ce qui est exclu. De même si $x' < x$. On en déduit donc que $x = x'$. ■

⚠ La réciproque est fausse : une fonction peut être injective sans être monotone. Par exemple

$$f : \begin{cases} [0,2] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,1] \\ 4-x & \text{si } x \in]1,2] \end{cases} \end{cases}.$$

Nous verrons que la réciproque est vraie si la fonction est continue sur intervalle.

B - Surjections

Définition 52 (Surjection)

On dit que f est **surjective** de E sur F ou que c'est une **surjection** de E sur F si $\operatorname{Im} f = F$, c'est-à-dire si

$$\forall y \in F, \ \exists x \in E, \quad y = f(x).$$

Autrement dit, tout élément de F possède au moins un antécédent dans E par f.

La notion de surjectivité répond à la question suivante : est-ce que tout élément de F peut s'écrire comme $f(x)$ pour au moins un $x \in E$?

ℹ Toute fonction est surjective de son ensemble de définition sur son image.

Exemple 53 La fonction $x \longmapsto x^2$ est surjective sur (son image) $\mathbb{R}_+$.

Exemple 54 La fonction cos est surjective sur (son image) $[-1,1]$.

Exemple 55 La fonction $(x,y) \longmapsto x+y$ est surjective de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}$.

Démonstration

Soit $y \in \mathbb{R}$. Alors $f(0,y) = y$. ■

Proposition 56 (Composition et surjections)

Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications.

(i) Si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ l'est aussi.

(ii) Si $g \circ f$ est surjective alors g l'est aussi.

⚠ Ici non plus, pour l'assertion (ii), f n'a aucune raison d'être surjective lorsque $g\circ f$ l'est. Par exemple, considérons $f : x \longmapsto x^2$ et $g : x \longmapsto \cos(x)$. La fonction f n'est pas surjective sur $\mathbb{R}$, pourtant, $g\circ f : x \longmapsto \cos(x^2)$ est surjective sur $[-1,1]$. L'idée est qu'il suffit que f atteigne un ensemble sur lequel g prend toutes les valeurs de $[-1,1]$. Ici, $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_+ \supset [0,2\pi]$, ce qui suffit.

Démonstration

(i) Soit $y \in G$. Par surjectivité de g, il existe $x \in F$ tel que $y = g(x)$. Par surjectivité de f, il existe $t \in E$ tel que $x = f(t)$. On obtient alors : $y = g(f(t))$. Ainsi, la fonction $g\circ f$ est surjective.

(ii) Soit $y \in G$. Par surjectivité de $g\circ f$, il existe $t \in E$ tel que $y = g(f(t))$. En posant $x = f(t)$ on a donc $y = g(x)$. Ainsi, la fonction g est surjective.

Voici une deuxième démonstration basée sur la réflexion suivante :

« comment $g\circ f$ peut-elle atteindre tout G si g seule ne le peut même pas ? »

On a $F = \mathrm{Im}\, g\circ f \subset \mathrm{Im}\, g \subset F$. Ainsi $\mathrm{Im}\, g = F$, d'où la surjectivité de g. ■

C - Bijections, réciproques

Définition 57 (Réciproque)

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. On appelle **réciproque** de f sur F toute application $g : F \longrightarrow E$ telle que

$$g\circ f = Id_E \quad \text{ET} \quad f\circ g = Id_F.$$

Exemple 58 Les fonctions $\begin{cases}\mathbb{R}_+ & \longrightarrow \mathbb{R}_+\\ x & \longmapsto x^2\end{cases}$ et $\begin{cases}\mathbb{R}_+ & \longrightarrow \mathbb{R}_+\\ x & \longmapsto \sqrt{x}\end{cases}$ sont réciproques l'une de l'autre car pour tout $x \geq 0$:

$$\sqrt{x^2} = |x| = x \quad \text{et} \quad \sqrt{x}^2 = x.$$

Définition 59 (Bijection)

On dit que f est **bijective** de E sur F ou que c'est une **bijection** de E sur F si

$$\forall y \in F,\ \exists! x \in E,\quad y = f(x).$$

Autrement dit, tout élément de F possède exactement un antécédent dans E par f.

On retiendra les trois associations suivantes :

- **injective :** au plus un antécédent ;
- **surjective :** au moins un antécédent ;
- **bijective :** exactement un antécédent.

Proposition 60 (Caractérisation d'une bijection)

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Les trois assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f est bijective : $\forall y \in F,\ \exists! x \in E,\ y = f(x)$.

(ii) f possède une réciproque sur F.

(iii) f est injective et surjective.

Dans ce cas, f ne possède qu'une réciproque, notée $f^{-1} : F \longrightarrow E$. De plus, pour tous $x \in E$ et $y \in F$:

$$f(x) = y \iff x = f^{-1}(y).$$

Si f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, le graphe de f^{-1} s'obtient à partir de celui de f par symétrie par rapport à la droite $y = x$.

Démonstration

- (i) $\Rightarrow$ (ii). Supposons que f soit bijective. Pour tout $y \in F$, il existe un unique $x_y \in E$ tel que $y = f(x)$. On peut donc définir $g : F \longrightarrow E$ par $g(y) = x_y$. Ainsi,
  - ▷ Pour tout $x \in E$, $f(x) \in F$ et $g(f(x))$ est l'unique antécédent de $f(x)$ par f. Or x est un antécédent de $f(x)$, donc

$$g(f(x)) = x.$$

▷ Pour tout $y \in F$, $g(y)$ est, par définition, l'unique antécédent de y par f. Ainsi

$$f(g(y)) = f(x_y) = y.$$

Finalement, g est une réciproque de f.

- (ii) $\Rightarrow$ (iii). Supposons que f possède une réciproque $g : F \longrightarrow E$.
  ▷ $g \circ f = Id_E$ et Id_E est injective, donc $g \circ f$ aussi. Aussitôt, f est injective également.
  ▷ $f \circ g = Id_F$ et Id_F est surjective, donc $f \circ g$ aussi. Aussitôt, f est surjective également.
- (iii) $\Rightarrow$ (i). Supposons que f soit injective et surjective. Tout élément de F possède au moins un antécédent par surjectivité, et au plus un antécédent par injectivité. Il possède donc exactement un antécédent, et f est bijective. ■

Exemple 61

- L'application Id_E est bijective.
- ln est bijective de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$.
- exp est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$.
- $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est bijective de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}^*$.

Définition 62 (Permutation et groupe symétrique)
On appelle **permutation** de E toute bijection de E sur E.
L'ensemble des permutations de E est noté $\mathcal{S}_E$ et est appelé le **groupe symétrique** de E. Si $E = [\![1;n]\!]$ pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, on écrit plutôt $\mathcal{S}_n$.

Exemple 63 Le groupe symétrique $\mathcal{S}_2$ est de cardinal 2, il contient seulement les applications $\mathrm{Id}_{[\![1;2]\!]}$ et $\begin{cases} 1 & \longmapsto & 2 \\ 2 & \longmapsto & 1. \end{cases}$ Le groupe symétrique $\mathcal{S}_3$ est quant à lui de cardinal 6 et ses éléments sont les applications :

$$\mathrm{Id}_{[\![1;3]\!]},\ \begin{cases} 1 & \longmapsto & 2 \\ 2 & \longmapsto & 1 \\ 3 & \longmapsto & 3 \end{cases},\ \begin{cases} 1 & \longmapsto & 3 \\ 2 & \longmapsto & 2 \\ 3 & \longmapsto & 1 \end{cases},\ \begin{cases} 1 & \longmapsto & 1 \\ 2 & \longmapsto & 3 \\ 3 & \longmapsto & 2 \end{cases},\ \begin{cases} 1 & \longmapsto & 2 \\ 2 & \longmapsto & 3 \\ 3 & \longmapsto & 1 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} 1 & \longmapsto & 3 \\ 2 & \longmapsto & 1 \\ 3 & \longmapsto & 2. \end{cases}$$

On les écrit plutôt $\mathrm{Id}_{[\![1;3]\!]}$, $(1\,2)$, $(1\,3)$, $(2\,3)$, $(1\,2\,3)$, $(1\,3\,2)$,

en remarquant que $\mathrm{Id}_{[\![1;3]\!]}^{-1} = \mathrm{Id}_{[\![1;3]\!]}$, $(1\,2)^{-1} = (1\,2)$, $(1\,3)^{-1} = (1\,3)$, $(2\,3)^{-1} = (2\,3)$, $(1\,2\,3)^{-1} = (1\,3\,2)$.

En pratique
Pour montrer qu'une application $f : E \longrightarrow F$ est bijective, on peut :

(i) Trouver un candidat $g : F \longrightarrow E$ pour l'application réciproque (par intuition) et vérifier que

$$f \circ g = \mathrm{Id}_F \quad \text{ET} \quad g \circ f = \mathrm{Id}_E.$$

(ii) Résoudre, pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in E$ en exprimant alors x en fonction de y : $x = g(y)$. On en déduit alors que f est bijective, de réciproque g.

(iii) Montrer que la fonction f est à la fois injective et surjective.

La méthode 2 permet donc de trouver la réciproque tout en montrant la bijectivité. Elle permet également d'étudier l'injectivité et la surjectivité en fonction du nombre de solutions.

Exemple 64 Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$. La fonction $x \longmapsto ax + b$ est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ de réciproque $x \longmapsto \dfrac{x-b}{a}$.

Démonstration

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $\quad y = ax + b \iff x = \dfrac{y-b}{a}$. ■

Exemple 65 La fonction $x \longmapsto x - \dfrac{1}{x}$ est injective sur $\mathbb{R}_+^*$ mais pas sur $\mathbb{R}^*$. De plus, elle est surjective de $\mathbb{R}^*$ sur $\mathbb{R}$.

Démonstration

L'équation $y = x - \dfrac{1}{x}$ devient $x^2 - yx - 1 = 0$ et les solutions sont $\dfrac{y \pm \sqrt{y^2+4}}{2}$. Puisque $y \leqslant \sqrt{y^2} \leqslant \sqrt{y^2+4}$ par croissante de $\sqrt{\cdot}$, une solution est négative et l'autre est positive. Donc, la fonction est injective sur $\mathbb{R}_+^*$ mais pas sur $\mathbb{R}^*$.
De plus, elle est surjective puisque l'équation a toujours au moins une solution. ■

Exemple 66 La fonction $x \longmapsto \dfrac{x-1}{x+1}$ est bijective de $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Démonstration

Pour tous $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$ et $y \in \mathbb{R}$:

$$y = f(x) \iff y = \frac{x-1}{x+1} \iff xy + y = x - 1 \iff x(1-y) = 1 + y.$$

Si $y = 1$, alors l'équation est équivalente à $0 = 2$, donc n'a pas de solution et donc $\operatorname{Im} f \subset \mathbb{R}\setminus\{1\}$.
Si $y \neq 1$,

$$y = f(x) \iff x = \frac{1+y}{1-y}.$$

Cela démontre que f est bijective de $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, de réciproque $y \longmapsto \dfrac{1+y}{1-y}$, puisque tout $y \neq 1$ admet un unique antécédent. ■

La proposition suivante découle directement des propriétés de la composition des applications injectives et surjectives.

Proposition 67 (Composition et bijections)

Soit $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications.
(i) Si f et g sont bijectives alors $g \circ f$ l'est aussi. (ii) Si $g \circ f$ est bijective alors f est injective et g est surjective.

Démonstration

(i) On a montré qu'une composée de fonctions injectives (resp. surjectives) est injective (resp. surjective). Ainsi, comme f et g sont bijectives, elles sont en particulier injectives et surjectives. On a donc la fonction $g \circ f$ injective et surjective et donc elle est bijective.
(ii) Par hypothèse, la fonction $g \circ f$ est bijective. En particulier,
(a) $g \circ f$ est injective donc f est injective. (b) $g \circ f$ est surjective donc g est surjective. ■

Proposition 68 (Réciproque et composition)

Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications.
(i) Si f est bijective de E sur F alors f^{-1} l'est de F sur E et $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.
(ii) Si f et g sont bijectives alors $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Démonstration

(i) Par définition, $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$, ce qui montre exactement que f est une réciproque de f^{-1} : donc f^{-1} est bijective (d'après la caractérisation) et $(f^{-1})^{-1} = f$.
(ii) On calcule $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f = f^{-1} \circ \mathrm{Id}_F \circ f = f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$, et de même $(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = \mathrm{Id}_G$. Donc $f^{-1} \circ g^{-1}$ est bien la réciproque de $g \circ f$. ■

Terminons ce chapitre par une explication sur la notation $f^{\leftarrow}$, utilisée jusqu'ici à titre *temporaire*. Lorsqu'on a défini l'image réciproque, on aurait naturellement voulu la noter $f^{-1}(B)$, mais cette notation est ambiguë : elle peut désigner soit l'image réciproque de B par f, soit l'image directe de B par la fonction réciproque f^{-1}, lorsque celle-ci existe. Si f n'est pas bijective, seule la première interprétation a un sens – mais que se passe-t-il lorsque f est bijective ?

Proposition 69 (Bijectivité et image réciproque)

Soit f une bijection de E sur F et $B \subset F$. On a $f^{\leftarrow}(B) = f^{-1}(B)$.

Démonstration

Soit $x \in E$. On a

$$x \in f^{\leftarrow}(B) \iff f(x) \in B \iff \exists b \in B,\ f(x) = b \iff \exists b \in B,\ x = f^{-1}(b) \iff x \in f^{-1}(B).$$ ■

Ainsi, lorsque f est bijective, l'image réciproque de B par f et l'image directe de B par f^{-1} coïncident : l'ambiguïté ne pose donc en réalité aucun problème. Désormais, on abandonne la notation temporaire $f^{\leftarrow}(B)$ au profit de la notation usuelle $f^{-1}(B)$ pour désigner l'image réciproque de B par f, que f soit bijective ou non. Lorsque f est bijective, $f^{-1}(B)$ désigne alors indifféremment l'image réciproque de B par f ou l'image directe de B par f^{-1}, les deux coïncidant d'après la proposition précédente.

⚠ Il reste toutefois une confusion à éviter : pour $y \in F$, ne confondez pas $f^{-1}(\{y\})$ et $f^{-1}(y)$.

- $f^{-1}(\{y\})$ est l'image réciproque du **singleton** $\{y\}$: c'est toujours un **ensemble** (éventuellement vide ou à plusieurs éléments), quelle que soit f.
- $f^{-1}(y)$, sans accolades, ne désigne l'image de y par la fonction réciproque QUE si f est bijective : c'est alors un **élément** de E.

Exemple 70 Pour la fonction $f : x \longmapsto x^2$ définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $f^{-1}(\{4\}) = \{-2, 2\}$, mais $f^{-1}(4)$ n'a pas de sens : f n'étant pas bijective, elle n'a pas de réciproque.
En revanche, pour la fonction $g : x \longmapsto e^x$ définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$, qui est bijective, et $g^{-1}(\{1\})$ est le singleton $\{0\}$, dont l'unique élément est précisément $g^{-1}(1) = 0$: conformément à la proposition précédente, $g^{-1}(\{1\}) = \left\{g^{-1}(1)\right\}$.