

SOMMES ET PRODUITS

Introduction

Ce chapitre a pour objectif d'introduire les notations compactes $\sum$ et $\prod$, ainsi que les principales règles de calcul permettant de manipuler les sommes et les produits.

Ce chapitre a pour objectif d'introduire les notations compactes $\sum$ et $\prod$, ainsi que les principales règles de calcul permettant de manipuler les sommes et les produits.

Table des matières

I	Sommes	1
A -	Notation $\sum$	1
B -	Premières propriétés des sommes	2
C -	Simplifications télescopiques	2
D -	Changement d'indice	4
E -	Sommes usuelles	4
II	Sommes doubles et sommation par paquets	7
A -	Sommes doubles	7
B -	Sommation par paquets	8
III	Produits	9
A -	Définition et propriétés des produits	9
B -	Coefficients binomiaux et binôme de Newton	11

I) SOMMES

A - NOTATION $\sum$

Soient $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $m \leq n$ et $a_m, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. La somme des a_i , où i décrit $\llbracket m; n \rrbracket$, peut s'écrire *in extenso* :

$$a_m + a_{m+1} + \dots + a_n.$$

Cette écriture permet de visualiser immédiatement les termes de la somme. En revanche, elle devient rapidement encombrante dès que l'on effectue des calculs sur les sommes : les expressions sont alors moins lisibles et plus propices aux erreurs. On introduit donc la notation compacte suivante :

$$\sum_{k=m}^n a_k = a_m + a_{m+1} + \dots + a_n.$$

Par exemple,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \sum_{k=3}^{2n} \sqrt{k} = \sqrt{3} + \dots + \sqrt{2n}.$$

Un cas particulier important est celui où tous les termes de la somme sont égaux.

Proposition 1 (Somme de constantes)

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et tous $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $m \leq n$:

$$\sum_{k=m}^n \alpha = \underbrace{\alpha}_{k=m} + \dots + \underbrace{\alpha}_{k=n} = (n - m + 1) \times \alpha.$$

L'entier k est appelé **indice de sommation**. Il est muet, c'est-à-dire qu'il n'a de signification qu'à l'intérieur de la somme. Son nom n'a donc aucune importance et il peut être remplacé par n'importe quelle autre lettre, à condition de ne pas créer de confusion avec une variable déjà utilisée. Ainsi,

$$\sum_{k=m}^n a_k = \sum_{i=m}^n a_i = \sum_{j=m}^n a_j.$$

Une fois la somme évaluée, l'indice n'existe plus et la même lettre peut être réutilisée dans un autre contexte. Ainsi, les expressions

$$\sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k \quad \text{et} \quad \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) \times \left(\sum_{k=1}^m b_k \right)$$

sont valides, car les deux indices de sommation sont indépendants. En revanche, les écritures :

$$\sum_{k=1}^n a_k = k \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=1}^n a_k \geq 0$$

n'ont pas de sens. Dans la première expression, la variable k n'est définie qu'à l'intérieur de la somme. Dans la seconde, le quantificateur porte sur une variable qui est déjà liée par la somme.

Plus généralement, pour toute famille $(a_i)_{i \in I}$ de réels indexée par un ensemble fini I , la somme des a_i , i décrivant I est notée $\sum_{i \in I} a_i$. Par exemple,

$$\sum_{i \in \{1,3,7\}} a_i = a_1 + a_3 + a_7, \quad \text{et, par convention des sommes vides,} \quad \sum_{i \in \emptyset} a_i = 0.$$

Cette convention est naturelle : sommer aucun terme revient à ne rien ajouter, ce qui laisse la valeur initiale inchangée. Elle intervient régulièrement dans les manipulations de sommes. Par exemple,

$$\sum_{k=1}^0 k^2 = 0.$$

Il est souvent utile de sommer uniquement les termes dont les indices vérifient une certaine propriété. Si $I = \{i \in \llbracket 1; n \rrbracket \mid 2 \mid i\}$, alors la somme des a_i pour i décrivant I peut également s'écrire

$$\sum_{\substack{i=1 \\ 2 \mid i}}^n a_i, \quad \text{ou encore,} \quad \sum_{\substack{i=1 \\ i \text{ pair}}}^n a_i.$$

La forme *in extenso* pourra être utilisée pour développer l'intuition, mais les calculs rigoureux se feront désormais à l'aide du symbole $\sum$. Entraînez-vous donc dès à présent à le manipuler !

B - PREMIÈRES PROPRIÉTÉS DES SOMMES

La proposition suivante découle directement des propriétés usuelles de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{R}$.

Proposition 2 (Linéarité de la somme)

Pour toutes familles de réels $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(b_i)_{1 \leq i \leq n}$ et tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

(i) **(Additivité)**

$$\sum_{i=1}^n (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i.$$

(ii) **(Homogénéité)**

$$\sum_{i=1}^n \lambda a_i = \lambda \sum_{i=1}^n a_i.$$

Ces deux propriétés se résument sous la forme suivante, appelée **linéarité de la somme** :

$$\sum_{i=1}^n (\lambda a_i + \mu b_i) = \lambda \sum_{i=1}^n a_i + \mu \sum_{i=1}^n b_i.$$

Démonstration

- (i) Simple conséquence de la commutativité et de l'associativité de l'addition.
- (ii) Découle de la distributivité de la multiplication sur l'addition.



C - SIMPLIFICATIONS TÉLÉSCOPIQUES

Les sommes de la forme $\sum_{i=m}^n (a_{i+1} - a_i)$ sont dites **téléscopiques**. On en rencontre souvent et elles sont l'avantage d'être très simples à simplifier :

$$\sum_{i=m}^n (a_{i+1} - a_i) = (a_{m+1} - a_m) + (a_{m+2} - a_{m+1}) + \cdots + (a_{n+1} - a_n)$$

$$\begin{aligned}
&= -a_m + \underbrace{(a_{m+1} - a_{m+1})}_{=0} + \underbrace{(a_{m+2} - a_{m+2})}_{=0} + \cdots + \underbrace{(a_n - a_n)}_{=0} + a_{n+1} \\
&= a_{n+1} - a_m.
\end{aligned}$$

Proposition 3 (Simplification télescopique)

Pour tous $a_m, \dots, a_{n+1} \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{i=m}^n (a_{i+1} - a_i) = a_{n+1} - a_m.$$

Démonstration

On fixe $m \in \mathbb{N}$. Montrons, par récurrence sur $n \geq m$, que

$$\sum_{i=m}^n (a_{i+1} - a_i) = a_{n+1} - a_m.$$

Initialisation : Pour $n = m$,

$$\sum_{i=m}^m (a_{i+1} - a_i) = a_{m+1} - a_m,$$

Hérédité : Soit $n \geq m$ et supposons que

$$\sum_{i=m}^n (a_{i+1} - a_i) = a_{n+1} - a_m.$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=m}^{n+1} (a_{i+1} - a_i) &= \sum_{i=m}^n (a_{i+1} - a_i) + (a_{n+2} - a_{n+1}) \\
&\stackrel{\text{HDR}}{=} (a_{n+1} - a_m) + (a_{n+2} - a_{n+1}) \\
&= a_{n+2} - a_m.
\end{aligned}$$

Par le principe de récurrence, le résultat est démontré pour tout $n \geq m$. ■

Exemple 4 Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) = \sum_{i=1}^n (\ln(k+1) - \ln k) = \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1).$$

Exemple 5

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Démonstration

À ce stade, notre principal outil pour calculer une somme est de la transformer en une somme télescopique. Nous cherchons donc à écrire

$$\frac{1}{k(k+1)}$$

comme la différence de deux termes consécutifs.

Le dénominateur $k(k+1)$ est celui que l'on obtiendrait en mettant au même dénominateur deux fractions de dénominateurs k et $k+1$. On raisonne alors par analyse-synthèse.

Analyse : Supposons qu'il existe deux **constantes** $A, B \in \mathbb{R}$ telles que, pour tout entier $k \geq 1$,

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1}.$$

Alors, en mettant au même dénominateur, pour tout entier $k \geq 1$,

$$1 = A(k+1) + Bk = (A+B)k + A.$$

Le membre de gauche est constant donc celui de droite aussi, il vient alors $A+B=0$. Aussitôt, $A=1$ et $B=-1$.

Synthèse : Vérifions que ce choix convient. Pour tout entier $k \geq 1$,

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}.$$

ce qui fait apparaître une somme télescopique. D'où le résultat.

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

D - CHANGEMENT D'INDICE

Pour écrire une somme à l'aide du symbole $\sum$, il faut identifier une règle décrivant les termes à sommer. Par exemple, la somme

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}$$

peut naturellement s'écrire

$$\sum_{i=3}^n \frac{1}{i}.$$

Cependant, on peut tout aussi bien choisir de numérotter les termes à partir de 0. La même somme s'écrit alors

$$\frac{1}{3+0} + \frac{1}{3+1} + \cdots + \frac{1}{3+(n-3)} = \sum_{j=0}^{n-3} \frac{1}{3+j}.$$

Les deux écritures décrivent exactement les mêmes termes : seule la façon de les indexer change. Le fait de passer d'une écriture à l'autre s'appelle un **changement d'indice**. Dans cet exemple, le changement d'indice consiste à poser $j = i - 3$.

Plus généralement, effectuer un changement d'indice consiste à remplacer l'indice de sommation par un nouvel indice, en adaptant les bornes de sorte que les mêmes termes soient parcourus une fois et une seule.

Par exemple, en posant $j = i - 3$, on obtient

$$\sum_{i=3}^n a_i = \sum_{j=0}^{n-3} a_{j+3}$$

i	3	4	$\cdots$	$n-1$	n
j	0	1	$\cdots$	$n-4$	$n-3$

Il est également possible de parcourir les termes dans l'ordre inverse. Ainsi, en posant $j = n - i$, on obtient

$$\sum_{i=0}^n a_i = \sum_{j=0}^n a_{n-j}$$

i	0	1	$\cdots$	$n-1$	n
j	n	$n-1$	$\cdots$	1	0

Le changement d'indice est un outil particulièrement utile pour effectuer des calculs. Nous en donnons une première application en proposant une nouvelle preuve de la propriété de simplification télescopique.

Démonstration de la simplification télescopique

$$\begin{aligned} \sum_{i=m}^n (a_{i+1} - a_i) &= \sum_{i=m}^n a_{i+1} - \sum_{i=m}^n a_i && \text{(linéarité)} \\ &= \sum_{i=m+1}^{n+1} a_i - \sum_{i=m}^n a_i && \text{(changement d'indice } j = i + 1) \\ &= \sum_{i=m}^n a_i - \sum_{i=m}^n a_i + a_{n+1} - a_m \\ &= a_{n+1} - a_m. \end{aligned}$$

E - SOMMES USUELLES

Certaines sommes reviennent si souvent qu'il est indispensable de connaître leur valeur par cœur : c'est le cas des sommes des premiers entiers, de la somme de leurs carrés, ou encore des sommes géométriques.

Proposition 6 (Sommes des entiers consécutifs)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Démonstration

Soit $n \in \mathbb{N}$ et posons $S = \sum_{k=0}^n k$. Sommons de deux façons différentes les nombres de ce tableau :

0	1	2	...	$n-1$	n	$\rightarrow S$
n	$n-1$	$n-2$	...	1	0	$\rightarrow S$
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	...	$\downarrow$	$\downarrow$	
n	n	n	...	n	n	$\left. \vphantom{\sum_{k=0}^n} \right\} n(n+1)$

On obtient alors $2S = n(n+1)$, d'où le résultat.

Le raisonnement précédent se traduit naturellement à l'aide du changement d'indice $i = n - k$:

$$2S = \sum_{k=0}^n k + \sum_{k=0}^n k = \sum_{k=0}^n k + \sum_{i=0}^n (n-i) = \sum_{i=0}^n i + \sum_{i=0}^n (n-i) = \sum_{i=0}^n n = n(n+1).$$

Par conséquent,

$$S = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Avec la même démonstration, on peut plus généralement aussi calculer la somme des termes d'une suite arithmétique.

Proposition 7 (Somme arithmétique)

Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^n u_k = (n+1) \times \frac{\text{1^{er} terme} + \text{dernier terme}}{2} = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$$

En pratique, on peut aussi rapidement retrouver la formule en réutilisant la somme des entiers consécutifs.

Démonstration

Notons $r \in \mathbb{R}$ la raison de $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Par linéarité de la somme,

$$\sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n (u_0 + kr) = (n+1)u_0 + r \sum_{k=0}^n k = (n+1) \left(u_0 + \frac{rn}{2} \right) = \frac{(n+1)}{2} (u_0 + (u_0 + rn)).$$

On dispose également d'une formule pour la somme des carrés consécutifs.

Proposition 8 (Sommes des carrés consécutifs)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Démonstration

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1.$$

Sommons ces égalités de $k = 1$ à n . Pour le membre de gauche, on obtient, par simplification télescopique :

$$\sum_{k=0}^n ((k+1)^3 - k^3) = (n+1)^3.$$

Pour le membre de droite, on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (3k^2 + 3k + 1) &= 3 \sum_{k=0}^n k^2 + 3 \sum_{k=0}^n k + \sum_{k=0}^n 1 \\ &= 3 \sum_{k=0}^n k^2 + \frac{3n(n+1)}{2} + (n+1). \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
3 \sum_{k=0}^n k^2 &= (n+1)^3 - \frac{3n(n+1)}{2} - (n+1) \\
&= \frac{n+1}{2} (2(n+1)^2 - 3n - 2) \\
&= \frac{n+1}{2} (2n^2 + n) \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{2},
\end{aligned}$$

ce qui donne le résultat voulu. ■

On s'intéresse maintenant à la somme des termes d'une suite géométrique.

Proposition 9 (Somme géométrique)

Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tous $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $m \leq n$,

$$\sum_{k=m}^n x^k = \begin{cases} x^m \frac{x^{n-m+1} - 1}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ n - m + 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1^{er} terme
nombre de termes

Démonstration

Si $x = 1$, alors :

$$\sum_{k=m}^n x^k = \sum_{k=m}^n 1 = n - m + 1.$$

Sinon, on a :

$$\begin{aligned}
(x-1) \sum_{k=m}^n x^k &= \sum_{k=m}^n (x^{k+1} - x^k) \\
&= x^{n+1} - x^m \quad (\text{par simplification télescopique}) \\
&= x^m (x^{n-m+1} - 1),
\end{aligned}$$

ce qui conclut. ■

La formule $a^n - b^n$ suivante généralise l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ et généralise aussi la formule des sommes géométriques.

Proposition 10 (Formule $a^n - b^n$)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $a, b \in \mathbb{R}$,

$$a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k-1}.$$

Démonstration

On a, par simplification télescopique :

$$(a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (a^{k+1} b^{n-(k+1)} - a^k b^{n-k}) = a^n b^0 - a^0 b^n = a^n - b^n.$$

II) SOMMES DOUBLES ET SOMMATION PAR PAQUETS

A - SOMMES DOUBLES

On considère à présent des sommes dont les indices sont des couples. Elles apparaissent naturellement, par exemple, lors du développement d'un produit de sommes :

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^m a_i \right) \left(\sum_{j=1}^n b_j \right) &= (a_1 + \cdots + a_m)(b_1 + \cdots + b_n) \\ &= a_1 b_1 + a_1 b_2 + \cdots + a_m b_{n-1} + a_m b_n \\ &= \sum_{(i,j) \in \llbracket 1;m \rrbracket \times \llbracket 1;n \rrbracket} a_i b_j = \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} a_i b_j. \end{aligned}$$

Dans ce cas, sommer les $c_{ij} = a_i b_j$ sur $I = \llbracket 1;m \rrbracket \times \llbracket 1;n \rrbracket$ revient à sommer les termes d'un tableau à double entrée.

$$c_{ij} = a_i b_j$$

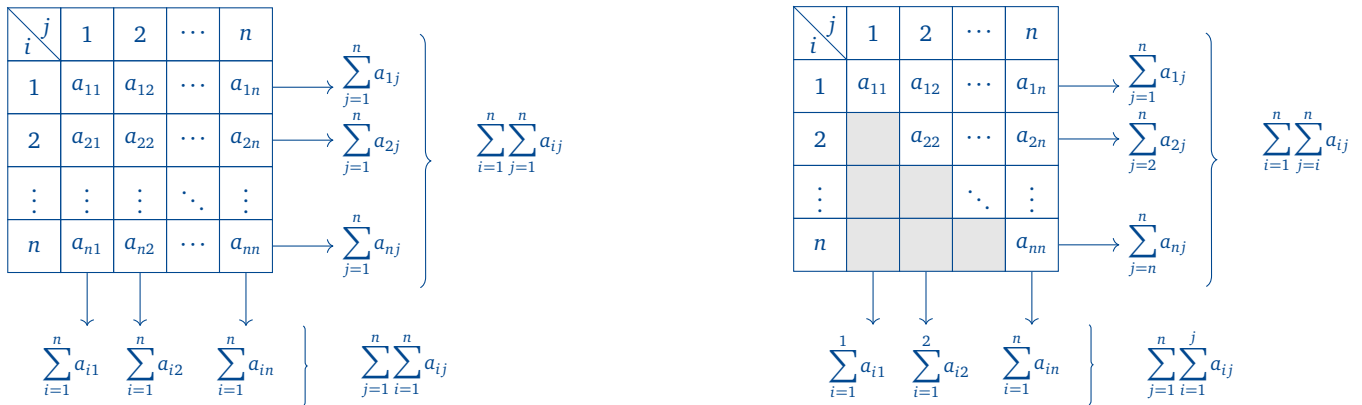
$i \backslash j$	1	2	$\cdots$	n
0	c_{11}	c_{12}	$\cdots$	c_{1n}
1	c_{21}	c_{22}	$\cdots$	c_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
m	x_{m1}	x_{m2}	$\cdots$	x_{mn}

Proposition 11 (Produit de deux $\sum$)

Pour tous $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$:

$$\left(\sum_{i=1}^m a_i \right) \times \left(\sum_{j=1}^n b_j \right) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} a_i b_j.$$

On peut également vouloir sommer uniquement les coefficients situés dans le triangle supérieur (respectivement strictement supérieur) d'un tableau à double entrée. Qu'il s'agisse d'un rectangle ou d'un triangle, on peut alors effectuer la somme ligne par ligne, puis sommer les résultats obtenus, ou procéder de manière analogue colonne par colonne.



Proposition 12 (Permutation de sommes)

Pour toute famille de complexes $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$,

(i)

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij}$$

(ii)

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n a_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j a_{ij}$$

(iii)

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n a_{ij} = \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} a_{ij}$$

Remarque

Lorsqu'on calcule une double somme et qu'on ne sait pas quoi faire, on permute les sommes !

Exemple 13 Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \frac{1}{j} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j \frac{1}{j} = \sum_{j=1}^n 1 = n.$$

Corrigé

La première égalité est une permutation de sommes (deuxième point de la proposition précédente), appliquée à $a_{ij} = \frac{1}{j}$. Ensuite, pour j fixé, le terme $\frac{1}{j}$ ne dépend pas de i , donc $\sum_{i=1}^j \frac{1}{j} = j \times \frac{1}{j} = 1$. Il reste alors $\sum_{j=1}^n 1 = n$. ■

En appliquant la formule du produit de deux sommes, on peut obtenir une formule pour le carré d'une somme, qui généralise les identités remarquables usuelles.

Proposition 14 (Carré d'une somme)

Pour tout $(a_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$,

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j$$

doubles produits

Démonstration

D'après la proposition du produit de sommes (appliquée à $b_i = a_i$),

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2 = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_i a_j.$$

On sépare maintenant les couples (i, j) avec $1 \leq i, j \leq n$ selon que $i = j$, $i < j$ ou $i > j$ (ces trois cas partitionnent l'ensemble des couples) :

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_i a_j = \sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j + \sum_{1 \leq j < i \leq n} a_i a_j.$$

Les deux dernières sommes sont égales (par symétrie du produit $a_i a_j = a_j a_i$ et en échangeant les noms de i et j), d'où le résultat. ■

Exemple 15 Pour tous $a, b, c \in \mathbb{R}$,

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \quad \text{et} \quad (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc).$$

B - SOMMATION PAR PAQUETS**Proposition 16**

Soient I, J deux ensembles finis, $(I_j)_{j \in J}$ une partition de I et $(a_i)_{i \in I} \in \mathbb{C}^I$ une famille de complexes. On a

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I_j} a_i.$$

— Terminons cette sous-partie par une propriété très utile en pratique, qui permet de découper une somme en plusieurs morceaux disjoints (par exemple pour isoler les indices pairs des indices impairs, ou pour traiter séparément les premiers et les derniers termes).

Proposition 17 (Sommation par paquets)

Soient A et B deux ensembles et $(a_i)_{i \in A \cup B}$ une famille de réels.

Si A et B sont disjoints, alors

$$\sum_{i \in A \cup B} a_i = \sum_{i \in A} a_i + \sum_{i \in B} a_i.$$

Dans le cas général,

$$\sum_{i \in A \cup B} a_i = \sum_{i \in A} a_i + \sum_{i \in B} a_i - \sum_{i \in A \cap B} a_i.$$

Exemple 18 Pour $n \in \mathbb{N}$, on peut regrouper les termes pairs et impairs de la somme

$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k = \sum_{k=0}^n 2k - \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1).$$

Démonstration

Comme $(I_j)_{j \in J}$ est une partition de I , tout élément $i \in I$ appartient à exactement un des I_j . Sommer a_i pour i parcourant I revient donc à regrouper les termes selon le paquet I_j auquel ils appartiennent, puis à sommer sur les paquets : chaque terme a_i est compté une et une seule fois de chaque côté de l'égalité, ce qui donne la formule. Le cas particulier découle du cas général appliqué à la partition $I = A \sqcup B$ (avec $J = \{1, 2\}$, $I_1 = A$, $I_2 = B$). Enfin, si A et B ne sont pas disjoints, on écrit $A \cup B = A \sqcup (B \setminus A)$ (union disjointe), d'où $\sum_{i \in A \cup B} a_i = \sum_{i \in A} a_i + \sum_{i \in B \setminus A} a_i$. Or $B = (B \setminus A) \sqcup (A \cap B)$, donc $\sum_{i \in B} a_i = \sum_{i \in B \setminus A} a_i + \sum_{i \in A \cap B} a_i$, c'est-à-dire $\sum_{i \in B \setminus A} a_i = \sum_{i \in B} a_i - \sum_{i \in A \cap B} a_i$. En substituant, on obtient la formule annoncée. ■

Exemple 19 Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{i=0}^n (-1)^i i = \begin{cases} -\frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \\ \frac{n}{2} & \text{sinon} \end{cases}.$$

Corrigé

Supposons n impair et regroupons les termes deux par deux : $\sum_{i=0}^n (-1)^i i = \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} [(-1)^{2k}(2k) + (-1)^{2k+1}(2k+1)] = \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} (-1) = -\frac{n+1}{2}$, car il y a $\frac{n+1}{2}$ paquets. Si n est pair, on procède de même en isolant le dernier terme $i = n$ (positif car n pair) : $\sum_{i=0}^n (-1)^i i = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i i + n = -\frac{n}{2} + n = \frac{n}{2}$, en utilisant le résultat précédent avec $n-1$ impair. ■

Corrigé

Les deux égalités sont des cas particuliers de la sommation par paquets. Pour la première, on partitionne $\llbracket 0; n+2 \rrbracket$ en $\{0\}$, $\llbracket 1; n \rrbracket$, $\{n+1\}$ et $\{n+2\}$. Pour la seconde, on partitionne $\llbracket 1; n \rrbracket$ selon la parité des indices. ■

En pratique

Pour calculer une somme, on essaie d'utiliser les propriétés du cours et on essaie de se ramener aux sommes usuelles que l'on doit connaître PAR COEUR.

III) PRODUITS**A - DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS DES PRODUITS**

On introduit à présent la notation $\prod$, analogue multiplicatif de la notation $\sum$. De même que la somme vide vaut 0, le produit vide vaut 1 : c'est l'élément neutre de la multiplication, cohérent avec l'idée que « multiplier » par rien ne doit rien changer.

Proposition 20 (Produit de constantes)

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et tous $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $m \leq n$:

$$\prod_{k=m}^n \alpha = \underbrace{\alpha}_{k=m} \times \cdots \times \underbrace{\alpha}_{k=n} = \alpha^{n-m+1}.$$
Définition 21 (Factorielle)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle **factorielle** n ou n **factorielle** l'entier $n! = \prod_{k=1}^n k = 1 \times 2 \times \cdots \times n$.

Par convention : $0! = 1$.

Relation de récurrence : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $n! = n \times (n-1)!$.

Exemple 22

$$\frac{(n+2)!}{n!} = \frac{n! \times (n+1)(n+2)}{n!} = (n+1)(n+2).$$

Attention !

Ces trois quantités sont distinctes et ne doivent pas être confondues :

$$\begin{aligned}(2n)! &= 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (2n-1) \times (2n), \\ 2 \times n! &= 2 \times 1 \times 2 \times \cdots \times (n-1) \times n, \\ 2^n \times n! &= 2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n-2) \times (2n).\end{aligned}$$

La proposition suivante découle directement des propriétés usuelles de la multiplication dans $\mathbb{R}$.

Proposition 23 (Propriétés de calcul sur les produits)

(i) **Multiplication par un facteur constant.** Pour tout $(a_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{C}^n$ et $\alpha \in \mathbb{C}$,

$$\prod_{i=1}^n (\alpha a_i) = \alpha^n \prod_{i=1}^n a_i.$$

(ii) **Puissance d'un produit.** Pour tout $(a_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{C}^n$ et $k \in \mathbb{N}$,

$$\prod_{i=1}^n a_i^k = \left(\prod_{i=1}^n a_i \right)^k.$$

(iii) **Produit d'un produit.** Pour tous $(a_i)_{1 \leq i \leq n}, (b_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{C}^n$,

$$\prod_{i=1}^n (a_i b_i) = \left(\prod_{i=1}^n a_i \right) \left(\prod_{i=1}^n b_i \right).$$

De manière analogue aux sommes, les produits peuvent se simplifier par télescopage, en utilisant des divisions plutôt que des différences.

Proposition 24 (Simplification télescopique)

Pour tous $a_p, \dots, a_{n+1} \in \mathbb{R}^*$,

$$\prod_{i=p}^n \frac{a_{i+1}}{a_i} = \frac{a_{n+1}}{a_p}.$$

De la même façon que pour les sommes doubles, un produit portant sur deux indices se calcule en imbriquant deux produits simples, dans l'ordre de son choix.

Proposition 25 (Permutation de produits)

Pour toute famille de réels $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$,

(i)

$$\prod_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^n a_{ij} = \prod_{j=1}^n \prod_{i=1}^n a_{ij}$$

(ii)

$$\prod_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{ij} = \prod_{i=1}^n \prod_{j=i}^n a_{ij} = \prod_{j=1}^n \prod_{i=1}^j a_{ij}$$

(iii)

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} = \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=i+1}^n a_{ij} = \prod_{j=2}^n \prod_{i=1}^{j-1} a_{ij}$$

Exemple 26

$$\prod_{j=1}^n \prod_{i=j}^n \frac{j+1}{j} = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^i \frac{j+1}{j} = \prod_{i=1}^n (i+1) = (n+1)!.$$

On sait généralement mieux manipuler les sommes que les produits, notamment par habitude. Le logarithme fournit toutefois un moyen de transformer les produits en sommes.

Exemple 27 Pour des réels strictement positifs $a_1, \dots, a_n$, on a

$$\ln \left(\prod_{k=1}^n a_k \right) = \sum_{k=1}^n \ln(a_k).$$

Exemple 28 Pour tout réel a et tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\prod_{k=1}^n a^k = a^{\sum_{k=1}^n k} = a^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

B - COEFFICIENTS BINOMIAUX ET BINÔME DE NEWTON

On introduit maintenant les coefficients binomiaux. Ils permettent notamment de compter les sous-ensembles d'une taille donnée dans un ensemble fini. Ils apparaissent aussi dans le développement de $(a + b)^n$ avec la formule du binôme de Newton.

Définition 29 (Coefficients binomiaux)

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$.

On appelle **k parmi n** et on note $\binom{n}{k}$ le nombre de parties de cardinal k de l'ensemble $\llbracket 1; n \rrbracket$. On a alors :

- Si $k < 0$ ou $k > n$, $\binom{n}{k} = 0$.
- Si $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Plus généralement, $\binom{n}{k}$ est le nombre de parties de cardinal k d'un ensemble de cardinal n , pas nécessairement de l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Démonstration

Dans le chapitre dénombrement. ■

Les trois propriétés suivantes sont les relations de base à connaître sur les coefficients binomiaux; elles permettent notamment de construire le triangle de Pascal.

Proposition 30 (Propriétés des coefficients binomiaux)

Soient $n, k \in \mathbb{N}$.

- Symétrie** : $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
- Formule de Pascal** : $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.
- Formule du capitaine** : Si $n \geq 1$: $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$.

Démonstration

Dans le chapitre dénombrement. ■

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	...
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	

Formule de Pascal

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

On peut maintenant énoncer le résultat central de cette section : la formule du binôme de Newton, qui exprime $(a + b)^n$ comme une combinaison des puissances de a et de b , pondérées par les coefficients binomiaux.

Proposition 31 (Binôme de Newton)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $a, b \in \mathbb{R}$,

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Exemple 32

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4,$$

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

Démonstration

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On procède par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$ la propriété :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Initialisation : Pour $n = 0$, on a

$$(a+b)^0 = 1 = \binom{0}{0} a^0 b^0 = \sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} a^k b^{n-k}.$$

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $P(n)$ alors,

$$\begin{aligned} (a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\ &= (a+b) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \quad (\text{par hypothèse de récurrence}) \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^{i+1} b^{n-i} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \quad (\text{changement d'indice } k = i+1) \\ &= \binom{n}{0} a^0 b^{n-0+1} + \sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) a^k b^{n-k+1} + \binom{n}{n} a^{n+1} b^{n-(n+1)+1} \\ &= \binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1-0} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^{n+1-(n+1)} \quad (\text{formule de Pascal}) \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}. \end{aligned}$$

D'où $P(n+1)$.

Par récurrence, on conclut que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$. ■

Exemple 33 $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$

Exemple 34 $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k 1^{n-k} = (-1+1)^n = 0^n = \delta_{n,0} = \begin{cases} 1 & \text{si } n=0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$