SUITES RÉELLES

Table des matières

I Compléments sur les réels **2**
A - Droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$ . . . 2
B - Majorants/minorants, maximum/minimum . . . 2
C - Borne supérieure/inférieure . . . 4
D - Intervalles . . . 5

II Généralités sur les suites **6**
A - Vocabulaire usuel . . . 6
B - Suites arithmétiques, géométriques et arithmético-géométriques . . . 7

III Limite d'une suite réelle dans $\overline{\mathbb{R}}$ **8**
A - Définition de la limite . . . 8
B - Opérations sur les limites . . . 10
C - Limites et inégalités, composition . . . 11
D - Suites extraites . . . 12

IV Théorèmes d'existence de limite **13**
A - Théorèmes d'encadrement et de minoration/majoration . . . 13
B - Théorème de la limite monotone . . . 15
C - Suites adjacentes . . . 15
D - Théorème de Bolzano-Weierstrass . . . 16
E - Extension aux suites complexes . . . 17

V Introduction à l'analyse asymptotique **18**

VI Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$ **20**

VII Théorème de Cesàro **23**

VIII Caractérisations séquentielles et densité **24**

I) Compléments sur les réels

A - Droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$

Considérons deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell'$. On souhaiterait pouvoir affirmer que $u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell+\ell'$, quelle que soit la nature de ℓ et ℓ'. C'est effectivement le cas lorsque $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$, mais que dire lorsque ℓ ou ℓ' vaut $+\infty$ ou $-\infty$? Par exemple, si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, on a bien $u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$: il serait donc naturel de pouvoir écrire $(+\infty)+(+\infty)=+\infty$.

Pour donner un sens rigoureux à ce type d'écriture, et ainsi manipuler les limites infinies avec les mêmes règles de calcul que les limites finies, on introduit un ensemble contenant $\mathbb{R}$ ainsi que deux nouveaux éléments $-\infty$ et $+\infty$, auquel on étend l'ordre et les opérations usuelles de $\mathbb{R}$.

Définition 1 (Droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$)

On pose $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \sqcup \{-\infty, +\infty\}$, puis on étend à $\overline{\mathbb{R}}$ la relation $\leqslant$, l'addition $+$ et la multiplication $\times$ de $\mathbb{R}$ de la façon suivante.

- **Prolongement de l'ordre :** Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $-\infty < x < +\infty$.
- **Prolongement de l'addition :** Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$x+(+\infty)=(+\infty)+x=+\infty, \qquad (+\infty)+(+\infty)=+\infty,$$
$$x+(-\infty)=(-\infty)+x=-\infty, \qquad (-\infty)+(-\infty)=-\infty.$$

- **Prolongement de la multiplication :** $\dfrac{1}{+\infty}=\dfrac{1}{-\infty}=0$ et pour tout $x \in \overline{\mathbb{R}}\setminus\{0\}$:

$$x\times(+\infty)=(+\infty)\times x=\begin{cases}+\infty & \text{si } x>0\\ -\infty & \text{si } x<0\end{cases} \quad \text{et} \quad x\times(-\infty)=(-\infty)\times x=\begin{cases}-\infty & \text{si } x>0\\ +\infty & \text{si } x<0.\end{cases}$$

⚠ Nous ne définissons pas les valeurs des expressions

$$(+\infty)+(-\infty), \quad (+\infty)-(+\infty), \quad 0\times(\pm\infty) \quad \text{et} \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty} :$$

ce sont des **formes indéterminées**, et leur donner une valeur n'aurait pas de sens, car selon les suites concrètes qui y mènent, on peut obtenir n'importe quelle valeur (finie ou infinie), voire aucune limite du tout.

Prenez garde à ne jamais mener de calculs directement dans $\overline{\mathbb{R}}$: les règles de calcul y sont très contre-intuitives. Par exemple, l'écriture $\ell-\ell=0$ n'a même pas de sens en général (prendre $\ell=+\infty$), ou encore, l'équation $\ell=\ell+1$ a des solutions dans $\overline{\mathbb{R}}$ mais pas dans $\mathbb{R}$. Pour éviter d'écrire des absurdités, je conseille de toujours raisonner par disjonction de cas selon que les quantités en jeu sont réelles ou infinies.

B - Majorants/minorants, maximum/minimum

Dans la suite, A et B désignent une partie quelconque de $\mathbb{R}$. On rappelle la définition d'une partie majorée/minorée.

Définition 2 (Partie majorée/minorée)

- **Partie majorée :** On dit que A est **majorée** si : $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall a \in A,\ a \leqslant M$.
  Un tel M est appelé UN majorant de A. On dit aussi que A est **majorée** par M ou que M **majore** A.
- **Partie minorée :** On dit que A est **minorée** si : $\exists m \in \mathbb{R},\ \forall a \in A,\ m \leqslant a$.
  Un tel m est appelé UN minorant de A. On dit aussi que A est **minorée** par m ou que m **minore** A.
- **Partie bornée :** On dit que A est **bornée** si elle est minorée et majorée, *i.e.* si : $\exists K \geq 0,\ \forall a \in A,\ |a| \leqslant K$.

Exemple 3 L'intervalle $]-\infty, 1]$ est majoré par tout $M \geq 1$ mais n'est pas minoré.

Définition 4 (Maximum/minimum d'une partie)

- **Maximum :** On appelle **maximum** de A ou **plus grand élément** de A tout élément de A qui majore A.
- **Minimum :** On appelle **minimum** de A ou **plus petit élément** de A tout élément de A qui minore A.

Exemple 5 Toute partie finie non vide de $\mathbb{R}$ admet un maximum et un minimum.

Proposition 6 (Unicité du maximum/minimum)

Si A possède un maximum (resp. minimum), il est unique. On l'appelle alors LE maximum (resp. minimum).

Démonstration

Soient $M, M' \in \mathbb{R}$. Si M et M' sont deux maximums de A alors :

- $M' \leqslant M$ puisque $M' \in A$ et M majore A.
- $M \leqslant M'$ puisque $M \in A$ et M' majore A.

■

Exemple 7 L'intervalle $[0,1[$ admet 0 pour minimum mais n'a pas de maximum.

Démonstration

Montrons qu'aucun élément de $[0,1[$ ne majore $[0,1[$. C'est le cas puisque : $\forall x \in [0,1[\,,\ 0 \leqslant x < \dfrac{x+1}{2} < 1$.

■

Théorème 8 (Maximum et minimum d'une partie de $\mathbb{N}$)

(i) **Minimum :** Toute partie **non vide** de $\mathbb{N}$ possède un minimum. On dit alors que $\mathbb{N}$ est **bien ordonné**.
(ii) **Maximum :** Toute partie **non vide majorée** de $\mathbb{N}$ possède un maximum.

Démonstration

(i) Soit A une partie de $\mathbb{N}$. Raisonnons par contraposition : supposons que A ne possède pas de minimum et montrons que A est vide. Montrons par récurrence que A est minorée par tous les entiers naturels. On en déduira ensuite que A est vide (puisque si A contient un élément n, alors $n+1$ ne minore pas A).
   - **Initialisation :** A est minorée par 0 car toute partie de $\mathbb{N}$ l'est.
   - **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que A est minorée par n. Puisque A ne possède pas de minimum, $n \notin A$, et donc $n < a$ pour tout $a \in A$. Puisqu'il s'agit d'entiers, on a $n+1 \leqslant a$ pour tout $a \in A$. Finalement $n+1$ minore A.

(ii) Soit A une partie non vide majorée de $\mathbb{N}$. Dire que A est majorée dans $\mathbb{N}$ signifie qu'il existe un ENTIER M tel que $a \leqslant M$ pour tout $a \in A$. L'ensemble $\mathcal{M}$ des majorants entiers de A est donc une partie non vide de $\mathbb{N}$: d'après le point précédent, il possède un plus petit élément m.
   - Si $m = 0$, alors $\forall a \in A,\ a \leqslant m = 0$, et donc, puisque A est non vide, $A = \{0\}$ et donc A admet 0 pour maximum.
   - Sinon, $m \geq 1$. On a alors $m-1 \in \mathbb{N}$ et, par minimalité de m, $m-1$ ne majore pas A. Ainsi, il existe $a \in A$ tel que $m-1 < a$. Puisqu'il s'agit d'entiers, l'inégalité $m-1 < a \leqslant m$ devient l'égalité $m = a \in A$. Finalement, m est un élément de A qui majore A, c'est donc son maximum. ■

Proposition 9 (Le bon ordre de $\mathbb{N}$ est équivalent au principe de récurrence)

La propriété de **bon ordre** de $\mathbb{N}$, selon laquelle toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément, est équivalente au **principe de récurrence**.

Démonstration

Nous avons déjà démontré que le principe de récurrence implique la propriété de bon ordre.
Réciproquement, supposons que toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admette un plus petit élément. Soit $\mathcal{P}$ une propriété vérifiant $\mathcal{P}(0)$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n) \Longrightarrow \mathcal{P}(n+1)$.
Notons E l'ensemble des entiers pour lesquels $\mathcal{P}$ est fausse. Supposons par l'absurde que E est non vide : il admet alors un plus petit élément n.
- Comme $\mathcal{P}(0)$ est vraie, $0 \notin E$, donc $n \neq 0$.
- Par minimalité de n dans E, l'entier $n-1$ n'appartient pas à E, donc $\mathcal{P}(n-1)$ est vraie.
- L'hérédité appliquée à $\mathcal{P}(n-1)$ montre alors aussitôt $\mathcal{P}(n)$, ce qui contredit $n \in E$.

Cette contradiction montre que E est vide, c'est-à-dire que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. ■

Il en découle que toute propriété démontrable par récurrence peut également être démontrée en considérant le minimum (ou le maximum) d'une partie de $\mathbb{N}$ bien choisie, ce qui peut être beaucoup plus naturel dans certaines situations.

Exemple 10 Redémontrons l'existence de la décomposition en produit de facteurs premiers.

Démonstration

Supposons par l'absurde que le résultat est faux et posons

$$E = \{n \geq 2 \mid n \text{ n'est pas un produit de nombres premiers}\}.$$

Par hypothèse $E \neq \varnothing$, c'est donc une partie non vide de $\mathbb{N}$: elle admet un minimum m.
Par définition de E, m n'est pas premier. Comme $m \geq 2$, il existe donc $a, b \in [\![2; m-1]\!]$ tels que $m = ab$. Par

minimalité de m, ni a ni b n'appartient à E : ce sont donc des produits de nombres premiers. Par conséquent, $m = ab$ est lui aussi un produit de nombres premiers, ce qui contredit $m \in E$.
Ainsi, $E = \varnothing$, et tout entier $n \geq 2$ est un produit de nombres premiers. ■

C - Borne supérieure/inférieure

L'ensemble $[0,1[$ n'admet pas de maximum, mais 1 y joue tout de même un rôle particulier : c'est le plus petit de ses majorants.

Définition 11 (Borne supérieure/inférieure d'une partie de $\mathbb{R}$)

(i) **Borne supérieure :** S'il existe, le plus petit majorant de A est appelé LA **borne supérieure** de A et noté $\sup A$.
(ii) **Borne inférieure :** S'il existe, le plus grand minorant de A est appelé LA **borne inférieure** de A et noté $\inf A$.

Lorsque la borne supérieure existe, elle est unique puisqu'elle est, par définition, le minimum de l'ensemble des majorants.

Le sup ressemble beaucoup à un maximum, à ceci près qu'il n'est pas contraint d'appartenir à A : c'est précisément ce qui lui permet d'exister même quand A n'a pas de maximum. Lorsque A possède malgré tout un maximum, celui-ci en particulier majore A, et l'on s'attend donc à ce qu'il coïncide avec la borne supérieure.

Proposition 12 (Lien maximum/borne supérieure)

- Si A possède un maximum, alors A possède une borne supérieure et $\sup A = \max A$.
- Si A possède un minimum, alors A possède une borne inférieure et $\inf A = \min A$.

Démonstration

Si A possède un maximum M, alors :
- M majore A.
- Si $t < M$, alors t ne majore pas A (puisque $M \in A$), M est donc le plus petit majorant.

D'où $\sup A = M$. ■

Exemple 13 $\sup [0,1[= 1$.

Démonstration

- Le réel 1 majore $[0,1[$.
- Soit $x < 1$.
  - ▷ Si $x < 0$ alors x ne majore pas $[0,1[$.
  - ▷ Si $x \in [0,1[$, $0 \leqslant x < \dfrac{x+1}{2} < 1$ et donc x ne majore pas $[0,1[$. ■

Puisque le sup n'a pas besoin d'appartenir à A, il devrait exister plus souvent qu'un maximum. Se pose alors naturellement la question : existe-t-il, en fait, toujours ? Le résultat suivant, admis ici car sa démonstration est intimement liée à la construction de $\mathbb{R}$, répond oui, sous des hypothèses minimales : il suffit que l'ensemble soit non vide et majoré.

Théorème 14 (Propriété de la borne supérieure/inférieure)

- **Propriété de la borne supérieure :** Toute partie **non vide majorée** de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure.
- **Propriété de la borne inférieure :** Toute partie **non vide minorée** de $\mathbb{R}$ possède une borne inférieure.

Si l'on se place dans $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, ces deux restrictions disparaissent même complètement : il suffit de convenir que $\sup A = +\infty$ quand A n'est pas majorée, et que $\sup A = -\infty$ quand A est vide (et de même, symétriquement, pour la borne inférieure). Toute partie de $\overline{\mathbb{R}}$ admet alors une borne supérieure et une borne inférieure, sans aucune exception.

Théorème 15 (Propriété de la borne supérieure/inférieure dans $\overline{\mathbb{R}}$)

- **Propriété de la borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}}$:** Toute partie de $\overline{\mathbb{R}}$ possède une borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}}$.
- **Propriété de la borne inférieure dans $\overline{\mathbb{R}}$:** Toute partie de $\overline{\mathbb{R}}$ possède une borne inférieure dans $\overline{\mathbb{R}}$.

En pratique

Soit $x \in \mathbb{R}$.
- $\sup A \leqslant x \iff x$ majore A.
- $\sup A \geq x \iff$ aucun $t < x$ ne majore A.
- $\sup A = x \iff x$ majore A et aucun $t < x$ ne majore A.

Énonçons à présent quelques résultats élémentaires sur les bornes supérieures ; on a des résultats analogues pour les bornes inférieures. Ces résultats ne dépendent pas de la propriété de la borne supérieure.

Proposition 16 (Opérations sur les bornes supérieures)

Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$ possédant chacune une borne supérieure.

(i) **Inclusion :** Si $A \subseteq B$, alors $\sup A \leqslant \sup B$.

(ii) **Réunion :** L'ensemble $A \cup B$ possède une borne supérieure et $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$.

(iii) **Somme :** L'ensemble $A + B = \{a + b\}_{(a,b)\in A\times B}$ possède une borne supérieure et $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

(iv) **Multiplication :** Soit $\lambda > 0$. L'ensemble $\lambda A = \{\lambda a\}_{a\in A}$ possède une borne supérieure et $\sup(\lambda A) = \lambda \sup A$.

Démonstration

(i) Puisque $A \subseteq B$, tout $x \in A$ vérifie $x \in B$, donc $x \leqslant \sup B$: ainsi $\sup B$ majore A. Comme $\sup A$ est le **plus petit** majorant de A, on en déduit $\sup A \leqslant \sup B$.

(ii) Montrons que $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$.

- $\max\{\sup A, \sup B\}$ **majore** $A \cup B$ **:** soit $x \in A \cup B$. Si $x \in A$, alors $x \leqslant \sup A$; si $x \in B$, alors $x \leqslant \sup B$. Dans les deux cas, $x \leqslant \max\{\sup A, \sup B\}$.
- **C'est le plus petit majorant :** soit $x < \max\{\sup A, \sup B\}$, montrons que x ne majore pas $A \cup B$. Par définition du max, $x < \sup A$ ou $x < \sup B$.
  - ▷ Si $x < \sup A$, alors x ne majore pas A : il existe $t \in A \subseteq A \cup B$ tel que $x < t$.
  - ▷ Si $x < \sup B$, alors x ne majore pas B : il existe $t \in B \subseteq A \cup B$ tel que $x < t$.

  Dans les deux cas, x ne majore pas $A \cup B$.

(iii) Montrons que $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

- $\sup A + \sup B$ **majore** $A + B$ **:** pour tout $(a, b) \in A \times B$,

$$a \leqslant \sup A \quad \text{et} \quad b \leqslant \sup B, \quad \text{donc} \quad a + b \leqslant \sup A + \sup B.$$

- **C'est le plus petit majorant :** soit $x < \sup A + \sup B$, montrons que x ne majore pas $A + B$. Comme $x - \sup A < \sup B$, $x - \sup A$ ne majore pas B : il existe $b \in B$ tel que $x - \sup A < b$, *i.e.* $x - b < \sup A$. Ce dernier ne majorant pas A, il existe $a \in A$ tel que $x - b < a$, *i.e.* $x < a + b$. Comme $a + b \in A + B$, x ne majore pas $A + B$.

(iv) Soit $\lambda > 0$. Montrons que $\sup(\lambda A) = \lambda \sup A$.

- $\lambda \sup A$ **majore** λA **:** pour tout $x \in \lambda A$, il existe $a \in A$ tel que $x = \lambda a$. Comme $a \leqslant \sup A$ et $\lambda > 0$, on a $x = \lambda a \leqslant \lambda \sup A$.
- **C'est le plus petit majorant :** soit $x < \lambda \sup A$, montrons que x ne majore pas λA. Comme $\lambda > 0$, $\dfrac{x}{\lambda} < \sup A$, donc $\dfrac{x}{\lambda}$ ne majore pas A : il existe $a \in A$ tel que $\dfrac{x}{\lambda} < a$, *i.e.* $x < \lambda a$. Comme $\lambda a \in \lambda A$, x ne majore pas λA. ■

En réalité, la propriété de la borne supérieure est bien plus essentielle qu'il n'y paraît : c'est elle qui permet de démontrer des théorèmes majeurs comme le théorème de la limite monotone ou le théorème des valeurs intermédiaires. Ainsi, un fait en apparence aussi simple que l'existence de $\sqrt{2}$, obtenue d'ordinaire via le TVI, est en réalité une conséquence de la propriété de la borne supérieure.

D - Intervalles

On commence par rappeler la définition d'un intervalle.

Définition 17 (Intervalle)

On appelle intervalle de $\mathbb{R}$ toute partie I de $\mathbb{R}$ telle que : $\forall x, y \in I,\ [x, y] \subset I$.

La propriété de la borne supérieure permet notamment de montrer que les intervalles de $\mathbb{R}$ sont exactement de la forme que vous connaissez.

Proposition 18 (Intervalles de $\mathbb{R}$)

Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont exactement les ensembles $[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b]$, $]a, b[$, a et b étant éventuellement $\pm\infty$ lorsque l'intervalle est ouvert en cette borne.

Démonstration

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Si I est vide, $I =]0, 0[$ convient. Sinon, posons $a = \inf I$ et $b = \sup I$, définis dans $\overline{\mathbb{R}}$. On raisonne par disjonction de cas mais on ne traite que le cas $a \in I$ et $b \notin I$.

- **Cas où** $a \in I$ **et** $b \notin I$ **:** Montrons que $I = [a, b[$.

▹ Pour tout $x \in I$, $a \leqslant x \leqslant b$ par définition des bornes inférieures et supérieures. Comme $b \notin I$, on en déduit que $x \neq b$ et donc que $a \leqslant x < b$, d'où $x \in [a, b[$.
▹ Soit $x \in [a, b[$. Comme $x < b = \sup I$, x ne majore pas I. Il existe donc $b' \in I$ tel que $x < b'$. Nous venons de montrer que $x \in \left[a, b'\right]$ avec $a, b' \in I$, et, comme I est un intervalle, $\left[a, b'\right] \subset I$. D'où $x \in I$. ■

II) Généralités sur les suites

A - Vocabulaire usuel

Définition 19 (Suite réelle)

On appelle **suite (réelle)** toute fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. L'ensemble des suites réelles est noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
On note une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ plutôt que u et on note u_n ses termes plutôt que $u(n)$.

Les résultats de ce chapitre seront énoncés sur des suites définies sur $\mathbb{N}$ mais pourraient être énoncés pour des suites définies sur $[\![n_0; +\infty[\![$ avec $n_0 \in \mathbb{N}$.

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut être définie :

- **par récurrence :** $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$ (on exprime le terme u_{n+1} en fonction du terme précédent).
- **explicitement :** $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = f(n)$ (on exprime le terme u_n directement en fonction de n).
- **implicitement :** u_n peut être défini comme l'unique solution d'une équation (E_n).

Ce sont là trois façons de définir une suite, ce qui ne veut pas dire que ce sont trois types de suites. Une même suite peut aussi bien être définie explicitement que par récurrence. Une suite peut même être définie par récurrence double si ses termes dépendent des deux termes précédents.

Définition 20 (Suite majorée/minorée/bornée)

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :

- **majorée** si la partie $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée : $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant M$.
  On dit alors qu'un tel M **majore** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **majorée** par M.
  La définition d'une suite minorée est analogue.
- **bornée** si la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée : $\exists K \geq 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leqslant K$, ou encore si elle est à la fois minorée et majorée.

Définition 21 (Suite positive/croissante/monotone)

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :

- **positive** si : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 0$.
- **croissante** si : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geq u_n$, ou encore si : $\forall n, m \in \mathbb{N},\ n \leqslant m \Longrightarrow u_n \leqslant u_m$.
- **monotone** si elle est croissante ou décroissante.

Les définitions de suites négatives et décroissantes sont analogues, et toutes ces notions admettent une version **stricte**, obtenue en remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes.

Souvent, c'est le comportement à l'infini qui nous intéresse. On peut donc s'intéresser à des propriétés vraies « à partir d'un certain rang », représentées par les quantificateurs $\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N$. Par exemple, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante à partir d'un certain rang si : $\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ u_n \leqslant u_{n+1}$.

En pratique

Pour montrer qu'une suite est croissante, on peut :

- Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.
- Comparer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 si la suite est **strictement positive**. Cette méthode est à privilégier lorsque la quantité u_n est définie sous forme de produits.
- Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie **explicitement** : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = f(n)$, alors on peut étudier la monotonie de f pour en déduire la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

⚠ Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **suite récurrente** : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=f(u_n)$, alors :

$$f \text{ croissante} \not\Longrightarrow (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ croissante} ; \qquad f \text{ décroissante} \not\Longrightarrow (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ décroissante.}$$

Exemple 22 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0=1$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=\dfrac{u_n}{2}$.
La fonction $f : x\longmapsto \dfrac{x}{2}$ est croissante sur $\mathbb{R}$, et pourtant $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Démonstration

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $u_0=1$, donc $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\dfrac{1}{2^n}$. ■

Exemple 23 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0=1$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=-u_n$.
La fonction $f : x\longmapsto -x$ est décroissante sur $\mathbb{R}$, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est ni croissante ni décroissante.

Démonstration

Une récurrence immédiate donne : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=(-1)^n$. ■

Définition 24 (Suite stationnaire)

Une suite est **stationnaire** si elle est constante à partir d'un certain rang, c'est-à-dire si :

$$\exists N\in\mathbb{N},\ \forall n\geq N,\ u_n=u_N, \quad \text{ou encore,} \quad \exists N\in\mathbb{N},\ \forall n\geq N,\ u_{n+1}=u_n.$$

B - Suites arithmétiques, géométriques et arithmético-géométriques

Définition 25 (Suites arithmétiques/géométriques)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $q,r\in\mathbb{R}$.

- **Suites arithmétiques :** On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **arithmétique** de raison r si pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}=u_n+r$.
  Dans ce cas, pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_n=u_0+nr$.
- **Suites géométriques :** On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **géométrique** de raison q si pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}=qu_n$.
  Dans ce cas, pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_n=q^nu_0$.

Proposition 26 (Suites arithmético-géométriques)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $a,b\in\mathbb{R}$. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **arithmético-géométrique** si pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}=au_n+b$.

- Si $a=1$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison b, et : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=u_0+nb$.
- Si $a\neq 1$, alors l'équation $ax+b=x$ d'inconnue $x\in\mathbb{R}$ admet une unique solution $\ell=\dfrac{b}{1-a}$, la suite $(u_n-\ell)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison a, et : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\ell+\lambda a^n$, avec $\lambda=u_0-\ell$.

La relation $u_{n+1}=au_n+b$ est une équation linéaire : un terme linéaire en l'inconnue, auquel s'ajoute un second membre. On retrouve donc la structure de solutions de toute équation linéaire :

Solution générale = Solution particulière + Solution générale de l'équation homogène

Pour s'en convaincre, partons d'une solution $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$: elle vérifie $p_{n+1}-ap_n=b$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Considérons maintenant une suite quelconque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$u_{n+1}=au_n+b \iff u_{n+1}=au_n+(p_{n+1}-ap_n) \iff (u_{n+1}-p_{n+1})=a(u_n-p_n).$$

Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est solution si et seulement si $(u_n-p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est solution de l'équation homogène $v_{n+1}=av_n$. Autrement dit, toute solution s'écrit

$$u_n=\underbrace{(u_n-p_n)}_{\text{solution de l'équation homogène}}+\underbrace{p_n}_{\text{solution particulière}}.$$

Or l'équation homogène est celle d'une suite **géométrique** de raison a : on sait la résoudre. Tout le travail se ramène donc à exhiber **une seule** solution particulière — et on la cherche la plus simple possible, c'est-à-dire constante.

Démonstration

On ne traite que le cas $a \neq 1$.

- **Une solution particulière constante.** Soit $\ell \in \mathbb{R}$. $\ell = a\ell + b \iff (1-a)\ell = b \underset{a\neq 1}{\iff} \ell = \dfrac{b}{1-a}$.
  Il existe donc une unique solution constante ; on pose désormais $\ell = \dfrac{b}{1-a}$.
- **L'équation homogène.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - \ell = (au_n + b) - (a\ell + b) = a(u_n - \ell)$.
  La suite $(u_n - \ell)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc géométrique de raison a.
- **Conclusion.** Il existe par conséquent $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n - \ell = \lambda a^n$. Cette inconnue λ se détermine au rang 0 : $\lambda = u_0 - \ell$. Finalement, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \ell + (u_0 - \ell)a^n$. ■

Exemple 27 On cherche une expression explicite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = 2u_n + 1$.

Démonstration

L'équation $\ell = 2\ell + 1$ a pour unique solution $\ell = -1$, donc $(u_n + 1)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison 2 : il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda 2^n - 1$. Le rang 0 donne $1 = u_0 = \lambda - 1$, d'où $\lambda = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 2^{n+1} - 1$. ■

III) Limite d'une suite réelle dans $\overline{\mathbb{R}}$

A - Définition de la limite

Définition 28 (Limite d'une suite réelle)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

- Si $\ell \in \mathbb{R}$, on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet ℓ pour **limite** si : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ |u_n - \ell| < \varepsilon$.
- Si $\ell = +\infty$, on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet $+\infty$ pour **limite** si : $\forall A > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ u_n > A$.
- Si $\ell = -\infty$, on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet $-\infty$ pour **limite** si : $\forall A < 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ u_n < A$.

On note alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

En pratique

- Pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ en utilisant la définition, on introduit $\varepsilon > 0$ quelconque et on cherche à majorer $|u_n - \ell|$ par un terme v_n tel que :
  - v_n tend vers 0.
  - v_n est simple. Il faut pouvoir trouver facilement un entier N à partir duquel $v_n < \varepsilon$.
- Pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ en utilisant la définition, on introduit $A > 0$ quelconque et on cherche à minorer u_n par un terme v_n tel que :
  - v_n tend vers $+\infty$.
  - v_n est simple. Il faut pouvoir trouver facilement un entier N à partir duquel $v_n > A$.

Exemple 29 La suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0.

Démonstration

Soit $\varepsilon > 0$. Le terme $\dfrac{1}{n}$ est déjà assez simple. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\dfrac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \dfrac{1}{\varepsilon}$, il suffit donc de trouver un entier plus grand que $\dfrac{1}{\varepsilon}$. Posons $N = \left\lfloor \dfrac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$: c'est un entier naturel non nul, et $N > \dfrac{1}{\varepsilon}$ par définition de la partie entière. Pour tout $n \geq N$, $n \geq N > \dfrac{1}{\varepsilon}$, donc $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$.

On a donc montré : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ \dfrac{1}{n} < \varepsilon$, c'est-à-dire que la suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0. ■

Exemple 30 $\dfrac{2n \operatorname{Arctan}\left(e^{\sqrt{n}}\right)}{n^2+7} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Démonstration

Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\left|\dfrac{2n\operatorname{Arctan}\left(e^{\sqrt{n}}\right)}{n^2+7}\right| \leqslant \dfrac{n\pi}{n^2+7} \leqslant \dfrac{n\pi}{n^2} = \dfrac{\pi}{n}$.

Posons $N = \left\lfloor \dfrac{\pi}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$. On a alors : $\forall n \geq N$, $\left|\dfrac{2n\operatorname{Arctan}\left(e^{\sqrt{n}}\right)}{n^2+7}\right| < \varepsilon$. ■

Exemple 31 $e^{\sqrt{n}+(-1)^n} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} +\infty$.

Démonstration

Soit $A > 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $e^{\sqrt{n}+(-1)^n} \geq e^{\sqrt{n}-1}$. Posons $N = \left\lfloor (\ln(A)+1)^2 \right\rfloor + 1$. On a alors, pour tout $n \geq N$:

$$e^{\sqrt{n}+(-1)^n} \geq e^{\sqrt{n}-1} > e^{\sqrt{(\ln(A)+1)^2}-1} = e^{|\ln(A)+1|-1} = A.$$

Donc $e^{\sqrt{n}+(-1)^n} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} +\infty$. ■

Proposition 32 (Unicité de la limite)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite, elle est unique. On la note alors $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n$.

Démonstration

Soient $\ell, \ell' \in \overline{\mathbb{R}}$ deux limites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On se contente de traiter le cas où elles sont finies.

- **Première preuve**

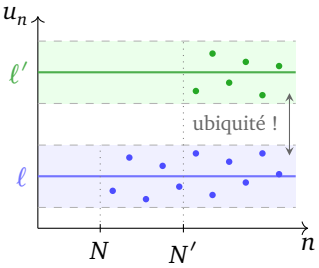
  Supposons par l'absurde $\ell \neq \ell'$; quitte à échanger leurs rôles, supposons $\ell < \ell'$, et posons $\varepsilon = \dfrac{\ell'-\ell}{2} > 0$. Par définition de la limite, il existe $N, N' \in \mathbb{N}$ tels que :

  $$\forall n \geq N,\ u_n < \ell + \varepsilon = \frac{\ell+\ell'}{2} \quad \text{et} \quad \forall n \geq N',\ u_n > \ell' - \varepsilon = \frac{\ell+\ell'}{2}.$$

  Pour $n = \max(N, N')$, ces deux inégalités s'appliquent simultanément, d'où

  $$\frac{\ell+\ell'}{2} < u_n < \frac{\ell+\ell'}{2},$$

  ce qui est absurde. Donc $\ell = \ell'$.



- **Seconde preuve**

  Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. Puisque $u_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} \ell$ et $u_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} \ell'$, il existe $N, N' \in \mathbb{N}$ tels que

  $$\forall n \geq N,\ |u_n - \ell| < \varepsilon \quad \text{et} \quad \forall n \geq N',\ \left|u_n - \ell'\right| < \varepsilon.$$

  Pour $n = \max(N, N')$, l'inégalité triangulaire donne $\left|\ell - \ell'\right| \leqslant |\ell - u_n| + \left|u_n - \ell'\right| < 2\varepsilon$. Si $\ell \neq \ell'$, le choix $\varepsilon = \dfrac{|\ell-\ell'|}{2} > 0$ donnerait $\left|\ell - \ell'\right| < \left|\ell - \ell'\right|$: c'est impossible, donc $\ell = \ell'$. ■

Définition 33 (Suite convergente/divergente)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **convergente** ou qu'elle **converge** si elle admet une limite finie. Sinon, on dit qu'elle est **divergente** ou qu'elle **diverge**.

Convergente	**Divergente**	
Limite finie	Limite infinie	Pas de limite

Proposition 34 (Convergente implique bornée)

Toute suite convergente est bornée.

Démonstration

Si $u_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$, il existe $N > 0$ tel que, pour tout $n \geq N$, $|u_n - \ell| < 1$ (en prenant $\varepsilon = 1$ dans la définition). On a alors, pour tout $n \geq N$: $|u_n| \leqslant |u_n - \ell| + |\ell| < 1 + |\ell|$. On pose alors $K_0 = \max(|u_0|, \ldots, |u_{N-1}|)$ et $K = \max(K_0, 1 + |\ell|)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- Si $n \leqslant N-1$, alors $|u_n| \leqslant K_0 \leqslant K$.
- Sinon, $|u_n| \leqslant 1 + |\ell| \leqslant K$.

Finalement, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée par K. ■

⚠
- La réciproque est fausse : une suite bornée n'est pas nécessairement convergente. Pensez à une suite qui oscille, comme $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, bornée mais divergente.
- Une suite non bornée n'a pas nécessairement de limite infinie : elle peut aussi ne pas avoir de limite du tout, comme $\left(n(-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, qui n'est ni bornée ni divergente vers $\pm\infty$.

B - Opérations sur les limites

Voici les tableaux récapitulatifs des opérations sur les limites. Dans les tableaux, ℓ et ℓ' désignent des limites réelles, $\pm\infty$ des limites infinies, F.I. une forme indéterminée, et A.P.C.R. signifie « à partir d'un certain rang ». Les tableaux de la somme et du produit se lisent à symétrie près en u_n et v_n.

$\lim_{n\to+\infty} u_n$	$\lim_{n\to+\infty} v_n$	$\lim_{n\to+\infty} (u_n+v_n)$
ℓ	ℓ'	$\ell+\ell'$
ℓ ou $+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
ℓ ou $-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	F.I.

Table 1 – Somme

$\lim_{n\to+\infty} u_n$	$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n}$
$\ell\neq 0$	$\frac{1}{\ell}$
$\pm\infty$	0
0, A.P.C.R. $u_n>0$	$+\infty$
0, A.P.C.R. $u_n<0$	$-\infty$
0, sinon	F.I.

Table 2 – Inverse

$\lim_{n\to+\infty} u_n$	$\lim_{n\to+\infty} v_n$	$\lim_{n\to+\infty} (u_nv_n)$
ℓ	ℓ'	$\ell\ell'$
$\ell\neq 0$ ou $\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
0	$\pm\infty$	F.I.

Table 3 – Produit

$\lim_{n\to+\infty} u_n$	$\lim_{n\to+\infty} \lambda u_n$
ℓ	$\lambda\ell$
$\pm\infty$, $\lambda\neq 0$	$\pm\infty$
$\pm\infty$, $\lambda=0$	0

Table 4 – Multiplication par un réel

Dans les tableaux 3 et 4, le signe de la limite infinie obtenue est donné par la règle des signes.

Démonstration

(i) **Somme de réels :** Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell'$ alors pour tout $\varepsilon>0$, soient N,N' tels que :

$$\forall n\geq N,\ |u_n-\ell|<\frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{et} \qquad \forall n\geq N',\ \left|v_n-\ell'\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Posons $N''=\max(N,N')$. Pour tout $n\geq N''$:

$$\begin{aligned}\left|(u_n+v_n)-(\ell+\ell')\right| &= \left|(u_n-\ell)+(v_n-\ell')\right| \\ &\leqslant |u_n-\ell|+\left|v_n-\ell'\right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

(ii) **Somme d'une limite réelle et de $+\infty$:** Supposons $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell\in\mathbb{R}$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, elle est bornée par un réel $K\geq 0$; en particulier $u_n\geq -K$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Soit $A>0$. Il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que $\forall n\geq N,\ v_n>A+K$. Alors, pour tout $n\geq N$: $u_n+v_n>-K+(A+K)=A$.

(iii) **Produit de réels :** Supposons $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell'$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, elle est bornée par un réel $K > 0$. Soient N, N' tels que :

$$\forall n \geqslant N,\ |u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2K} \qquad \text{et} \qquad \forall n \geqslant N',\ \left|v_n - \ell'\right| < \frac{\varepsilon}{2(|\ell|+1)}.$$

Posons $N'' = \max(N, N')$. Pour tout $n \geqslant N''$:

$$\begin{aligned}\left|u_n v_n - \ell\ell'\right| &= \left|(u_n - \ell)v_n + \ell(v_n - \ell')\right| \\ &\leqslant |u_n - \ell||v_n| + |\ell|\left|v_n - \ell'\right| \\ &\leqslant \frac{\varepsilon\,|v_n|}{2K} + \frac{\varepsilon\,|\ell|}{2(|\ell|+1)} < \varepsilon.\end{aligned}$$

(iv) **Inverse d'une limite réelle non nulle :** Supposons $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{R}^*$. On commence par éloigner u_n de 0 : la définition appliquée avec $\varepsilon = \dfrac{|\ell|}{2} > 0$ fournit $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant N$, $|u_n - \ell| < \dfrac{|\ell|}{2}$, et donc

$$|u_n| \geqslant |\ell| - |u_n - \ell| > \frac{|\ell|}{2} > 0.$$

En particulier, $\dfrac{1}{u_n}$ est bien défini à partir du rang N. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $N' \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N',\ |u_n - \ell| < \dfrac{\ell^2}{2}\varepsilon$. Posons $N'' = \max(N, N')$. Pour tout $n \geqslant N''$:

$$\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell}\right| = \frac{|u_n - \ell|}{|u_n||\ell|} \leqslant \frac{2}{\ell^2}|u_n - \ell| < \varepsilon.$$

■

C - Limites et inégalités, composition

Proposition 35 (Limites et inégalités strictes)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels de limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et $m, M \in \mathbb{R}$.

(i) Si $\ell < M$, alors $u_n < M$ à partir d'un certain rang. (ii) Si $\ell > m$, alors $u_n > m$ à partir d'un certain rang.

Démonstration

On ne traite que le cas où ℓ est finie, et on ne démontre que la première propriété. Si $\ell < M$, posons $\varepsilon = M - \ell > 0$. Il existe $N > 0$ tel que $\forall n \geqslant N,\ |u_n - \ell| < \varepsilon$. On a donc, pour tout $n \geqslant N$:

$$u_n = u_n - \ell + \ell \leqslant |u_n - \ell| + \ell < \varepsilon + \ell = M.$$

■

Proposition 36 (Passage à la limite dans une inégalité large)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites qui admettent une limite et telles que $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang. Alors,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim_{n\to+\infty} v_n.$$

Démonstration

Par contraposition, si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n > \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) > 0$, donc, à partir d'un certain rang, $u_n - v_n > 0$, c'est-à-dire $u_n > v_n$. ■

⚠ Le passage à la limite ne fonctionne que pour les inégalités larges : le caractère strict se perd avec la limite. C'est le cas de $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0 \leqslant 0$, alors que la suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement positive.

Le résultat suivant, vous l'utilisez depuis longtemps sans le savoir, mais il faudra attendre le chapitre « Limites et continuité » pour le démontrer proprement, puisqu'il repose sur la définition de la limite d'une fonction. Nous l'admettons donc pour l'instant, et l'utiliserons dès à présent.

Théorème 37 (Composition à gauche par une fonction)

Soient I un intervalle, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ un élément ou une borne de I, $L \in \overline{\mathbb{R}}$, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans I. Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et $f(x) \xrightarrow[x\to\ell]{} L$, alors $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$.

Exemple 38 Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^x$.

Démonstration

Quitte à traiter $x=0$ à part (la suite est alors constante égale à 1), on suppose $x \neq 0$.

Pour tout entier $n > |x|$, on a $1+\frac{x}{n} > 0$ et on écrit $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}$. Comme $\frac{x}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\frac{\ln(1+t)}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} 1$, on obtient par composition des limites $n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) = x \cdot \frac{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$. On compose enfin par la limite $\mathrm{e}^t \xrightarrow[t\to x]{} \mathrm{e}^x$ pour conclure. ■

⚠ $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \not\Longrightarrow u_n^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$

Autrement dit, $1^{+\infty}$ est une nouvelle forme indéterminée.

D - Suites extraites

Définition 39 (Suite extraite, valeur d'adhérence)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

- **Suite extraite :** On appelle **suite extraite** (ou **sous-suite**) de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ toute suite de la forme $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ où $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est une fonction strictement croissante. La fonction φ est appelée **fonction d'extraction**.
- **Valeur d'adhérence :** On appelle **valeur d'adhérence** de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ toute limite d'une suite extraite convergente de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

La fonction d'extraction φ peut elle-même s'écrire comme une suite (strictement croissante) d'entiers : $\varphi = (\varphi(0), \varphi(1), \ldots, \varphi(n), .$

Extraire une suite avec φ, c'est ne sélectionner que les termes d'indice $\varphi(0)$, $\varphi(1)$, $\varphi(2)$, etc. Par exemple, si $\varphi = (1,2,4,6,21,\ldots)$, la suite extraite est $(u_1, u_2, u_4, u_6, u_{21}, \ldots)$. Autrement dit, la suite extraite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est rien d'autre que la composée $u \circ \varphi$.

Exemple 40 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont obtenues en ne sélectionnant que les termes d'indice respectivement pair et impair.

⚠ Le terme suivant u_{2n} dans $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est le terme $u_{2(n+1)} = u_{2n+2}$.

Exemple 41 Les suites $\left(\sqrt{2^n+4n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites extraites de $(\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ obtenues à l'aide des fonctions d'extraction $n \longmapsto 2^n+4n$ et $n \longmapsto n^2$.

⚠ Si l'on extrait une suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une seconde fois avec une fonction d'extraction ψ, on obtient $\left(u_{\varphi(\psi(n))}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, et NON $\left(u_{\psi(\varphi(n))}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Autrement dit, $(u\circ\varphi)\circ\psi = u\circ(\varphi\circ\psi)$, et l'ordre de composition ne se renverse pas.

Exemple 42 Si l'on extrait $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\varphi(n) = 2n+1$, on obtient $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$. En extrayant à nouveau cette suite avec $\psi(n) = 3n$, on obtient $\left(u_{\varphi(\psi(n))}\right)_{n\in\mathbb{N}} = (u_{2(3n)+1})_{n\in\mathbb{N}} = (u_{6n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposition 43 (Propriété des fonctions d'extraction)

Toute fonction $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante vérifie : $\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi(n) \geq n$.

Démonstration

On a $\varphi(0) \in \mathbb{N}$ donc $\varphi(0) \geq 0$. De plus, si pour $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \geq n$, alors par stricte croissance, $\varphi(n+1) > \varphi(n) \geq n$. Comme $\varphi(n+1)$ est un entier, on a $\varphi(n+1) \geq n+1$. ■

Proposition 44 (Limite et suites extraites)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

(i) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ alors pour toute fonction $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} = \ell$.
En particulier, une suite convergente n'a qu'une seule valeur d'adhérence : sa limite.

(ii) $$\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = \ell \iff \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell.$$

Démonstration

On démontre les résultats pour $\ell \in \mathbb{R}$.

(i) Supposons $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \ell$ et soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N,\ |u_n - \ell| < \varepsilon$. En particulier, pour tout $n \geqslant N$, on a $\varphi(n) \geqslant n \geqslant N$ et donc $\left|u_{\varphi(n)} - \ell\right| < \varepsilon$.

(ii) Si $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_{2n} = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_{2n+1} = \ell$ alors, pour $\varepsilon > 0$, soient $N, N' \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\forall n \geqslant N,\ |u_{2n} - \ell| < \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \forall n \geqslant N',\ |u_{2n+1} - \ell| < \varepsilon.$$

Posons alors $N'' = \max\left(2N, 2N'+1\right)$. Pour tout $n \geqslant N''$:

- Si n est pair, alors $n = 2p$ avec un certain $p \geqslant N$, on a donc $|u_n - \ell| < \varepsilon$.
- Si n est impair, alors $n = 2p+1$ avec un certain $p \geqslant N'$, on a donc $|u_n - \ell| < \varepsilon$.

Dans tous les cas, $|u_n - \ell| < \varepsilon$. La réciproque découle du premier point. ■

D'après (i), il suffit de trouver deux sous-suites ayant des limites différentes pour montrer que la suite n'a pas de limite.

Exemple 45 La suite $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite car $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} (-1)^{2n} = 1$ et $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} (-1)^{2n+1} = -1$.

IV) Théorèmes d'existence de limite

A - Théorèmes d'encadrement et de minoration/majoration

Proposition 46 (Théorème d'encadrement/de minoration/de majoration)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles et $\ell \in \mathbb{R}$.

- **Théorème d'encadrement :**
  Si $m_n \leqslant u_n \leqslant M_n$ à partir d'un certain rang et $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} m_n = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} M_n = \ell$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.
- **Théorème de minoration :**
  Si $u_n \geqslant m_n$ à partir d'un certain rang et $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} m_n = +\infty$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.
- **Théorème de majoration :**
  Si $u_n \leqslant M_n$ à partir d'un certain rang et $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} M_n = -\infty$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$.

Contrairement au théorème de passage à la limite, les théorèmes d'encadrement/minoration/majoration sont des résultats d'EXISTENCE : on n'a pas besoin de savoir a priori que la suite converge pour les appliquer — au contraire, c'est précisément ce qu'on en déduit.

Démonstration

(i) Soit $\varepsilon > 0$. Soient :
- N tel que pour tout $n \geqslant N$: $m_n \leqslant u_n \leqslant M_n$,
- N' tel que pour tout $n \geqslant N'$: $|m_n - \ell| < \varepsilon$,
- N'' tel que pour tout $n \geqslant N''$: $|M_n - \ell| < \varepsilon$.

En posant $N_0 = \max\left(N, N', N''\right)$, pour tout $n \geqslant N_0$:

$$-\varepsilon < m_n - \ell \leqslant u_n - \ell \leqslant M_n - \ell < \varepsilon,$$

et donc $|u_n - \ell| < \varepsilon$.

(ii) Soit $A > 0$. Soient :
- N tel que pour tout $n \geqslant N$: $m_n \leqslant u_n$,
- N' tel que pour tout $n \geqslant N'$: $m_n > A$.

En posant $N_0 = \max\left(N, N'\right)$, pour tout $n \geqslant N_0$: $u_n \geqslant m_n > A$.

(iii) Se démontre de même, ou en appliquant (ii) aux suites $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(-M_n)_{n\in\mathbb{N}}$. ■

Proposition 47 (Produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \varepsilon_n = 0$ alors $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n\varepsilon_n = 0$.

Démonstration

Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, il existe $K\geq 0$ tel que $|u_n|\leqslant K$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Soit $\varepsilon>0$. Comme $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\varepsilon_n=0$, il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que, pour tout $n\geq N$, $|\varepsilon_n|<\dfrac{\varepsilon}{K+1}$. Alors, pour tout $n\geq N$:

$|u_n\varepsilon_n|\leqslant K\,|\varepsilon_n|\leqslant\dfrac{K\varepsilon}{K+1}<\varepsilon$. ■

Exemple 48 $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\dfrac{\sin n}{n}=0$.

Proposition 49 (Suites géométriques)

Soit $x\in\mathbb{R}$. Le comportement de la limite de x^n dépend de la valeur de x, comme le montre ce tableau.

De plus, si $|x|<1$, alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}x^k=\frac{1}{1-x}$.

	$x>1$	$x=1$	$-1<x<1$	$x\leqslant -1$
$\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}x^n$	$+\infty$	1	0	pas de limite

Démonstration

- Si $x>1$ alors $x^n=\big(1+(x-1)\big)^n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x-1)^k=1+n(x-1)+\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}(x-1)^k\geq n(x-1)$. On conclut avec le théorème de minoration.
- Si $x=1$ c'est évident.
- Si $x=0$, c'est évident. Si $0<|x|<1$, alors $\dfrac{1}{|x|}>1$, donc $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\left(\dfrac{1}{|x|}\right)^n=+\infty$ et donc $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}|x|^n=0$ par passage à l'inverse. On conclut alors que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}x^n=0$.
- Si $x=-1$, alors $x^n=(-1)^n$ vaut alternativement 1 et -1 : les suites extraites de termes pairs et impairs ont deux limites distinctes, donc $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite.
- Si $x<-1$, alors les suites extraites de termes pairs et impairs sont deux suites de limites respectives $+\infty$ et $-\infty$. Ainsi, la suite $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite.

Pour la somme, soit $x\in\mathbb{R}$ avec $|x|<1$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}x^k=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{}\frac{1}{1-x}$. ■

Exemple 50 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement positive et $\lambda\in\mathbb{R}_+$. On suppose que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lambda$. Alors :

(i) Si $\lambda>1$, $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}u_n=+\infty$. (ii) Si $\lambda<1$, $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}u_n=0$. (iii) Si $\lambda=1$, on ne peut rien dire !

Démonstration

(i) **Cas $\lambda>1$.** Posons $q=\dfrac{1+\lambda}{2}$, de sorte que $1<q<\lambda$. Comme $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lambda>q$, on a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}>q$ à partir d'un certain rang N. Par produit télescopique, pour tout $n\geq N$:

$$u_n=u_N\prod_{k=N}^{n-1}\frac{u_{k+1}}{u_k}\geq u_N\,q^{n-N}.$$

Or $q>1$, donc $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}q^{n-N}=+\infty$, d'où par comparaison $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}u_n=+\infty$.

(ii) **Cas $\lambda<1$.** Posons $q=\dfrac{1+\lambda}{2}$, de sorte que $\lambda<q<1$. Comme $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lambda<q$, on a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}<q$ à partir d'un certain rang N. Par produit télescopique, pour tout $n\geq N$:

$$u_n=u_N\prod_{k=N}^{n-1}\frac{u_{k+1}}{u_k}\leqslant u_N\,q^{n-N}.$$

Or $0<q<1$, donc $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}q^{n-N}=0$, d'où par comparaison (et $u_n>0$) $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}u_n=0$.

(iii) **Cas $\lambda=1$.** Les trois suites suivantes ont toutes un quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ qui tend vers 1 :

$$(1)_{n\in\mathbb{N}},\qquad (n+1)_{n\in\mathbb{N}},\qquad \left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}},$$

puisque leurs quotients valent respectivement 1, $\dfrac{n+2}{n+1}$ et $\dfrac{n+1}{n+2}$. Pourtant la première converge vers 1, la deuxième tend vers $+\infty$ et la troisième converge vers 0 : le comportement de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est donc pas déterminé dans le cas $\lambda=1$. ■

Proposition 51 (Croissance comparée)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 0$.

Démonstration

Si $x \neq 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\dfrac{|x|^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement positive et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{|x|}{n+1} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0$. Donc, d'après l'exemple précédent, $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = 0$, c'est-à-dire $\left|\dfrac{x^n}{n!}\right| \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0$, d'où $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 0$. ■

B - Théorème de la limite monotone

Théorème 52 (Théorème de la limite monotone)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une limite (finie ou infinie).
Plus précisément,

- si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, elle converge si elle est majorée et diverge vers $+\infty$ sinon ;
- si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, elle converge si elle est minorée et diverge vers $-\infty$ sinon.

Démonstration

- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante majorée alors l'ensemble $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ majorée, elle admet donc une borne supérieure $\ell \in \mathbb{R}$. Montrons que $u_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} \ell$. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de ℓ, $\ell - \varepsilon$ ne majore pas $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N > \ell - \varepsilon$. Par croissance de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, pour tout $n \geq N$, $u_n > \ell - \varepsilon$ et donc : $|u_n - \ell| = \ell - u_n < \varepsilon$. Ainsi, la suite converge (vers sa borne supérieure).
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante non majorée, soit $A > 0$. Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée, A ne peut pas être un majorant : il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N > A$. Par croissance de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a alors $u_n \geq u_N > A$ pour tout $n \geq N$. Ceci étant valable pour tout $A > 0$, on conclut que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = +\infty$.

Le cas décroissant s'en déduit en appliquant ce qui précède à la suite croissante $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. ■

⚠ Une suite croissante majorée par M **ne converge pas forcément vers** M !

Exemple 53 La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{\lfloor e^k \rfloor}{3^k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Démonstration

La suite est croissante car $u_{n+1} - u_n = \dfrac{\lfloor e^{n+1} \rfloor}{3^{n+1}} \geq 0$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\lfloor e^k \rfloor}{3^k} \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{e^k}{3^k} = \frac{1-(e/3)^{n+1}}{1-e/3} \leqslant \frac{3}{3-e}.$$

Croissante et majorée, la suite converge d'après le théorème de la limite monotone. ■

C - Suites adjacentes

Définition 54 (Suites adjacentes)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On dit qu'elles sont **adjacentes** si :

(i) l'une est croissante ; (ii) l'autre est décroissante ; (iii) $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} (u_n - v_n) = 0$.

Théorème 55 (Théorème des suites adjacentes)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles adjacentes. Les deux suites convergent vers une limite commune $\ell \in \mathbb{R}$.
De plus, si, par exemple, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, alors : $\forall n, m \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \ell \leqslant v_m$.

Démonstration

Supposons $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante.

- Montrons que $u_k \leqslant v_k$ pour tout $k\in\mathbb{N}$. Soient $k\in\mathbb{N}$ et $n\in\mathbb{N}$ tels que $n\geq k$. Par monotonie on a $u_k\leqslant u_n$ et $v_k\geq v_n$. On a donc $u_k-v_k\leqslant u_n-v_n$ et donc $u_k-v_k\leqslant 0$ par passage à la limite.
- Montrons maintenant que $u_m\leqslant v_n$ pour tout $n,m\in\mathbb{N}$. Soient $n,m\in\mathbb{N}$.
  - ▹ Si $n\leqslant m$, alors $u_m\leqslant v_m\leqslant v_n$ en utilisant le résultat précédent combiné à la décroissance de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
  - ▹ De même, si $n>m$, alors $u_m\leqslant u_n\leqslant v_n$ en combinant le résultat précédent à la croissance de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- Combinons avec le théorème de la limite monotone. En particulier, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par v_0. Et comme elle est croissante, elle converge vers $\ell\in\mathbb{R}$. On peut également montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante minorée et donc converge vers ℓ'. L'encadrement $u_n\leqslant\ell\leqslant v_m$ vient du fait que $\ell=\inf\{v_m \mid m\in\mathbb{N}\}=\sup\{u_n \mid n\in\mathbb{N}\}$.
- Conclusion. Le fait que $u_n-v_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ nous donne $\ell=\ell'$ après passage à la limite. Enfin, l'inégalité s'obtient par le fait que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par sa limite, et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par sa limite. ■

Exemple 56 Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ par $u_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ et $v_n=u_n+\frac{1}{n\cdot n!}$ sont adjacentes.

Démonstration

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ **est croissante.** Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{(n+1)!}>0$.
- $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ **est décroissante.** Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,
$$v_{n+1}-v_n=(u_{n+1}-u_n)+\frac{1}{(n+1)(n+1)!}-\frac{1}{n\cdot n!}=\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+1)(n+1)!}-\frac{1}{n\cdot n!}.$$
En réduisant au même dénominateur $n(n+1)^2n!$, il vient $v_{n+1}-v_n=-\frac{1}{n(n+1)^2n!}<0$.
- **Convergence de u_n-v_n vers 0.** Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n-v_n=-\frac{1}{n\cdot n!}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$.

Les trois conditions étant vérifiées, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes. ■

D - Théorème de Bolzano-Weierstrass

Théorème 57 (Bolzano-Weierstrass (cas réel))

De toute suite réelle bornée on peut extraire une sous-suite convergente. Autrement dit, toute suite bornée admet au moins une valeur d'adhérence.

Démonstration

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée : il existe $a_0\leqslant b_0$ tels que $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\in[a_0,b_0]$.

Construction des segments emboîtés. On construit par récurrence deux suites $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telles que, pour tout $k\in\mathbb{N}$,
$$[a_{k+1},b_{k+1}]\subset[a_k,b_k],\qquad b_k-a_k=\frac{b_0-a_0}{2^k},\qquad I_k:=\{n\in\mathbb{N} \mid u_n\in[a_k,b_k]\}\text{ infini.}$$

- **Initialisation :** Les réels a_0 et b_0 conviennent : $b_0-a_0=\frac{b_0-a_0}{2^0}$ et $I_0=\mathbb{N}$ est infini.
- **Hérédité :** Soit $[a_k,b_k]$ construit, de longueur $\frac{b_0-a_0}{2^k}$ et avec I_k infini. Posons $c=\frac{a_k+b_k}{2}$: alors $I_k=\{n \mid u_n\in[a_k,c]\}\cup\{n \mid u_n\in[c,b_k]\}$, et si ces deux ensembles étaient finis I_k le serait aussi. L'un au moins est donc infini, et l'on pose
$$[a_{k+1},b_{k+1}]=\begin{cases}[a_k,c] & \text{si } \{n \mid u_n\in[a_k,c]\}\text{ est infini,}\\ [c,b_k] & \text{sinon.}\end{cases}$$
Ce segment est inclus dans $[a_k,b_k]$, de longueur $\frac{b_k-a_k}{2}=\frac{b_0-a_0}{2^{k+1}}$, et I_{k+1} est infini.

Construction de la fonction d'extraction. On construit par récurrence une fonction d'extraction $\varphi:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ telle que $u_{\varphi(k)}\in[a_k,b_k]$ pour tout $k\in\mathbb{N}$.

- **Initialisation :** On pose $\varphi(0)=0$, de sorte que $u_{\varphi(0)}\in[a_0,b_0]$.
- **Hérédité :** Supposons $\varphi(k)$ construit. L'ensemble I_{k+1} étant infini, il contient un entier $n>\varphi(k)$, et l'on pose $\varphi(k+1)=\min\{n>\varphi(k) \mid u_n\in[a_{k+1},b_{k+1}]\}$. On a bien $\varphi(k)<\varphi(k+1)$ et $u_{\varphi(k+1)}\in[a_{k+1},b_{k+1}]$.

Conclusion. La suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante, la suite $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante, et $b_k - a_k = \dfrac{b_0-a_0}{2^k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$: les suites $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, donc convergent vers une même limite $\ell \in \mathbb{R}$. Comme $a_k \leqslant u_{\varphi(k)} \leqslant b_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, le théorème d'encadrement donne $u_{\varphi(k)} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \ell$. ■

E - Extension aux suites complexes

Les théorèmes d'existence précédents (encadrement, limite monotone, suites adjacentes) reposent tous sur des inégalités entre les termes de la suite, et c'est précisément ce qui les empêche de passer dans $\mathbb{C}$. Le théorème de Bolzano-Weierstrass, lui, ne suppose que la suite bornée : l'inégalité porte alors sur les modules $|u_n|$, qui sont des réels, et non plus sur les termes eux-mêmes. Elle garde donc un sens pour une suite complexe, et c'est ce qui permet d'étendre l'énoncé.

Nous donnons ci-dessous le minimum nécessaire à sa démonstration : la définition d'une suite complexe bornée, celle de la convergence dans $\mathbb{C}$, et le lien entre ces notions et les parties réelle et imaginaire.

Définition 58 (Suite complexe)

Une **suite complexe** est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$; elle est **bornée** si $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

Définition 59 (Limite d'une suite complexe)

Une suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge** vers $\ell \in \mathbb{C}$, et on note $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, si $|u_n - \ell| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, c'est-à-dire si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ |u_n - \ell| < \varepsilon,$$

ce qui équivaut à $\operatorname{Re}(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \operatorname{Re}(\ell)$ et $\operatorname{Im}(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \operatorname{Im}(\ell)$.

Démonstration

Le résultat découle du théorème d'encadrement appliqué à l'encadrement suivant, valable pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\max(|\operatorname{Re}(u_n) - \operatorname{Re}(\ell)|, |\operatorname{Im}(u_n) - \operatorname{Im}(\ell)|) \leqslant |u_n - \ell| \leqslant |\operatorname{Re}(u_n) - \operatorname{Re}(\ell)| + |\operatorname{Im}(u_n) - \operatorname{Im}(\ell)|.$$ ■

⚠ Il n'y a ni $+\infty$ ni $-\infty$ dans $\mathbb{C}$.

Une suite complexe converge vers un complexe, ou diverge (tout court). On peut en revanche écrire $|u_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, qui porte sur la suite **réelle** des modules : cela signifie que les termes s'éloignent de 0, sans rien dire de la direction. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge alors, mais elle n'a pas « pour limite ∞ ».

Théorème 60 (Bolzano-Weierstrass (cas complexe))

De toute suite complexe bornée on peut extraire une sous-suite convergente. Autrement dit, toute suite bornée admet au moins une valeur d'adhérence.

Démonstration

Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe bornée par $K \in \mathbb{R}_+^*$, c'est-à-dire telle que $|z_n| \leqslant K$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Première extraction. Comme $|\operatorname{Re}(z_n)| \leqslant |z_n| \leqslant K$, la suite **réelle** $(\operatorname{Re}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass dans $\mathbb{R}$, il existe une fonction d'extraction φ et $a \in \mathbb{R}$ tels que $\operatorname{Re}\left(z_{\varphi(n)}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$.

Seconde extraction. La suite $\left(\operatorname{Im}\left(z_{\varphi(n)}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est **réelle** et bornée par K. En lui appliquant à nouveau le théorème dans $\mathbb{R}$, on obtient une fonction d'extraction ψ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $\operatorname{Im}\left(z_{\varphi(\psi(n))}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} b$.

Conclusion. Comme $\left(\operatorname{Re}\left(z_{\varphi(\psi(n))}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de $\left(\operatorname{Re}\left(z_{\varphi(n)}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$, elle converge encore vers a, tandis que $\operatorname{Im}\left(z_{\varphi(\psi(n))}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} b$ par construction. On a alors $z_{\varphi(\psi(n))} \xrightarrow[n\to+\infty]{} a + ib$. ■

Proposition 61 (Convergence et valeurs d'adhérence)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe. Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge $\iff$ $\begin{cases} (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ admet une unique valeur d'adhérence.} \end{cases}$

Démonstration

- **Sens direct.** Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, elle est bornée. De plus, toute suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge également vers ℓ : ainsi ℓ est l'unique valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- **Réciproque.** Supposons $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée et notons ℓ son unique valeur d'adhérence. Montrons que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$. Par l'absurde, supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers ℓ : il existe $\varepsilon>0$ tel que, pour tout $N\in\mathbb{N}$, il existe $n\geq N$ avec $|u_n-\ell|\geq\varepsilon$. Autrement dit, l'ensemble $A=\{n\in\mathbb{N} \mid |u_n-\ell|\geq\varepsilon\}$ n'est pas majoré. On construit alors par récurrence une fonction d'extraction φ à valeurs dans A : on pose $\varphi(0)=\min A$ puis, $\varphi(n)$ étant construit, $\varphi(n+1)=\min\{k\in A \mid k>\varphi(n)\}$, ensemble non vide car A n'est pas majoré. La fonction φ est strictement croissante et :
$$\forall n\in\mathbb{N},\ \left|u_{\varphi(n)}-\ell\right|\geq\varepsilon.$$
Or la suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, comme suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, elle admet une sous-suite convergente $\left(u_{\varphi(\psi(n))}\right)_{n\in\mathbb{N}}$; notons ℓ' sa limite.
  - ▹ D'une part, $\left(u_{\varphi(\psi(n))}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donc ℓ' est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$: par unicité, $\ell'=\ell$.
  - ▹ D'autre part, en passant à la limite dans $\left|u_{\varphi(\psi(n))}-\ell\right|\geq\varepsilon$, on obtient $\left|\ell'-\ell\right|\geq\varepsilon>0$, donc $\ell'\neq\ell$: contradiction.

  Ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ. ■

⚠ L'hypothèse « bornée » est indispensable. La suite définie par $u_{2p}=0$ et $u_{2p+1}=p$ pour tout $p\in\mathbb{N}$ diverge, car elle n'est pas bornée. Pourtant, 0 est son unique valeur d'adhérence : une suite extraite convergente est bornée, donc ne contient qu'un nombre fini de termes d'indice impair, et elle est nulle à partir d'un certain rang.

V) Introduction à l'analyse asymptotique

Les suites $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(\frac{1}{n^3}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admettent toutes deux 0 pour limite, mais la première s'en approche beaucoup moins vite que la seconde. De même, les suites $(n^3)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(3^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendent toutes deux vers $+\infty$, mais la première y va beaucoup moins vite que la seconde. Savoir qu'une suite tend vers $+\infty$ est une bonne chose, mais connaître la « vitesse » à laquelle elle y tend en est une meilleure. La branche des mathématiques qui étudie ce type de questions s'appelle l'**analyse asymptotique**, et cette partie n'en est qu'un avant-goût : nous y reviendrons en détail plus tard dans l'année.

Définition 62 (Petits o et équivalents)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On suppose $v_n\neq0$ à partir d'un certain rang.

- **Négligeabilité** : on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **négligeable devant** $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ce qu'on note $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$, si $\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. On dit généralement que « u_n est un petit o de v_n ».
- **Équivalence** : on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **équivalente à** $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ce qu'on note $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, si $\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

Les définitions générales de la négligeabilité et de l'équivalence ne demandent pas que $v_n\neq0$ à partir d'un certain rang : on les verra dans le chapitre « Analyse asymptotique ».

Exemple 63 $n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(n^2\right)$ et $\frac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Les petits o donnent une nouvelle expression aux croissances comparées.

Exemple 64 Pour $\alpha,\beta>0$ et $\gamma>1$: $(\ln n)^\alpha \underset{n\to+\infty}{=} o\left(n^\beta\right)$, $n^\beta \underset{n\to+\infty}{=} o(\gamma^n)$, $\gamma^n \underset{n\to+\infty}{=} o(n!)$ et $n! \underset{n\to+\infty}{=} o(n^n)$.

Les équivalents donnent quant à eux un sens rigoureux au symbole $\approx$. Nous continuerons d'utiliser le symbole $\approx$ au brouillon pour faire de petits raisonnements rapides sans rigueur, mais la notation $\underset{n\to+\infty}{\sim}$ est définie précisément. Elle ne doit jamais servir à noter une simple approximation.

Exemple 65 $2n^4-5n^2+7 \underset{n\to\infty}{\sim} 2n^4$, $n+\ln n \underset{n\to\infty}{\sim} n$, $\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$ et $n!+5^n \underset{n\to\infty}{\sim} n!$.

Le « petit o » apparaît souvent à l'intérieur d'une somme, dans une écriture de la forme
$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} v_n+o(w_n) \quad \text{qui signifie} \quad u_n-v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n).$$
Autrement dit, u_n vaut v_n à une erreur près, et cette erreur est négligeable devant w_n : il existe une suite $(\widetilde{w}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\widetilde{w}_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$ et $u_n=v_n+\widetilde{w}_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Exemple 66 $n^3+2n+\ln n \underset{n\to+\infty}{=} n^3+o(n^2)$; $3^n+n^2 \underset{n\to+\infty}{=} 3^n+o(2^n)$.

Proposition 67 (Liens entre limites et petits o/équivalents)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles et $\ell\in\mathbb{R}$. On suppose $v_n\neq 0$ à partir d'un certain rang.

(i) **Lien entre limite et petit o** : $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \iff u_n \underset{n\to+\infty}{=} \ell+o(1)$.
En particulier : $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \iff u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$.

(ii) **Lien entre équivalent et petit o** : $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n \iff u_n \underset{n\to+\infty}{=} v_n+o(v_n)$.

Démonstration

(i) $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \iff \dfrac{u_n-\ell}{1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \iff u_n-\ell \underset{n\to+\infty}{=} o(1) \iff u_n \underset{n\to+\infty}{=} \ell+o(1)$.

(ii) $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \iff \dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \iff \dfrac{u_n-v_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \iff u_n-v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$. ■

On définit de même $o(\cdot)$ et $\sim$ pour des **fonctions** au voisinage de $a\in\overline{\mathbb{R}}$: $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ si $\dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 1$.

Les taux d'accroissement usuels en 0 donnent ainsi, pour $\alpha\in\mathbb{R}^*$:

$$\begin{array}{lll} e^x-1 \underset{x\to0}{\sim} x & \ln(1+x) \underset{x\to0}{\sim} x & (1+x)^\alpha-1 \underset{x\to0}{\sim} \alpha x \\ \sin x \underset{x\to0}{\sim} x & \tan x \underset{x\to0}{\sim} x & \\ \operatorname{sh} x \underset{x\to0}{\sim} x & \operatorname{th} x \underset{x\to0}{\sim} x & \\ \operatorname{Arcsin} x \underset{x\to0}{\sim} x & \operatorname{Arctan} x \underset{x\to0}{\sim} x & \dfrac{\pi}{2}-\operatorname{Arccos} x \underset{x\to0}{\sim} x \end{array}$$

S'y ajoutent $1-\cos x \underset{x\to0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$ et $\operatorname{ch} x-1 \underset{x\to0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$, qui ne sont pas des taux d'accroissement : comme $1-\cos x = 2\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)$ et $\operatorname{ch} x-1=2\operatorname{sh}^2\left(\dfrac{x}{2}\right)$,

$$\frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}} = \left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)^2 \xrightarrow[x\to0]{} 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{\operatorname{ch} x-1}{\frac{x^2}{2}} = \left(\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)^2 \xrightarrow[x\to0]{} 1.$$

Comme $\dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on en déduit par composition des limites des équivalents de suites :

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n}, \qquad \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n}, \qquad e^{1/n^2}-1 \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}.$$

À ce stade, on sait **démontrer** que deux suites sont équivalentes, mais on n'a encore **aucune règle de calcul** sur les équivalents (elles viendront au chapitre « Analyse asymptotique »). Pour calculer une limite, on devine donc le résultat au brouillon avec des $\approx$, puis on rédige en faisant apparaître les quotients qui tendent vers 1.

Exemple 68 Déterminons la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = n^2\ln\left(\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$.

Démonstration

Au brouillon. $\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\approx 1-\dfrac{1}{2n^2}$ et $\ln(1+h)\approx h$, donc $u_n \approx n^2\times\left(-\dfrac{1}{2n^2}\right)=-\dfrac{1}{2}$.

Rédaction. Posons $h_n=\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)-1$, de sorte que $u_n=n^2\ln(1+h_n)$. On a $h_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $h_n\neq 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, puisque $0<\dfrac{1}{n}\leqslant 1<2\pi$. On fait apparaître les deux quotients qui tendent vers 1 :

$$u_n = \frac{\ln(1+h_n)}{h_n}\times\frac{1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{2n^2}}\times\left(-\frac{1}{2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\frac{1}{2},$$

puisque, par composition des limites, $\dfrac{\ln(1+h_n)}{h_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ (car $h_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$) et $\dfrac{1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{2n^2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ (car $\dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$). On en déduit au passage $\left(\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)^{n^2} = e^{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-1/2}$. ■

Proposition 69 (Théorème d'encadrement pour les équivalents)
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quatre suites réelles.
Si $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ à partir d'un certain rang et $u_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\sim} a_n$ et $w_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\sim} a_n$, alors $v_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\sim} a_n$.

Démonstration
Le résultat est vrai en toute généralité, mais pour simplifier on suppose $a_n>0$ à partir d'un certain rang.
À partir d'un certain rang, on a donc à la fois $a_n>0$ et $u_n\leqslant v_n\leqslant w_n$. En divisant par $a_n>0$, on obtient :

$$\frac{u_n}{a_n}\leqslant\frac{v_n}{a_n}\leqslant\frac{w_n}{a_n}.$$

Par hypothèse, les deux suites extrêmes tendent vers 1 : le théorème d'encadrement donne $\frac{v_n}{a_n}\xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{}1$, c'est-à-dire $v_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\sim} a_n$. ■

Exemple 70 Pour tout $x>0$: $\lfloor nx\rfloor \underset{n\longrightarrow+\infty}{\sim} nx$.

Démonstration
Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $nx-1<\lfloor nx\rfloor\leqslant nx$, et les deux membres extrêmes sont équivalents à nx. Le théorème d'encadrement pour les équivalents donne $\lfloor nx\rfloor \underset{n\longrightarrow+\infty}{\sim} nx$. ■

VI) Suites récurrentes $u_{n+1}=f(u_n)$

Pour définir une suite récurrente $\begin{cases}u_0\in A\\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=f(u_n),\end{cases}$ il faut qu'à chaque étape $f(u_n)\in A$, sans quoi u_{n+1} ne serait pas bien défini. On se donne donc $f:A\longrightarrow A$ dans toute cette partie.

Proposition 71 (Existence de suites récurrentes)
Pour tout $a\in A$, il existe une unique suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\begin{cases}u_0=a\\ u_{n+1}=f(u_n).\end{cases}$ Cette suite est à valeurs dans A.

Exemple 72 Puisque $[0,1]$ est stable par $f:x\longmapsto\sqrt{1-x}$, il existe une unique suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0=\frac{1}{2}$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=\sqrt{1-u_n}$.

Démonstration
Soit $x\in[0,1]$. Alors $1-x\in[0,1]$, donc $f(x)=\sqrt{1-x}$ est bien défini et appartient à $[0,1]$. ■

Exemple 73 La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases}u_0=1\\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=u_n+\dfrac{1}{1+u_n^2}\end{cases}$ diverge vers $+\infty$.

Démonstration
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}-u_n=\dfrac{1}{1+u_n^2}>0$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Si elle convergeait vers $\ell\in\mathbb{R}$, en passant à la limite dans $u_{n+1}=u_n+\dfrac{1}{1+u_n^2}$, on aurait $\ell=\ell+\dfrac{1}{1+\ell^2}$, c'est-à-dire $\dfrac{1}{1+\ell^2}=0$: absurde. Croissante et non convergente, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée d'après le théorème de la limite monotone, et diverge donc vers $+\infty$.
Les écarts $u_{n+1}-u_n=\dfrac{1}{1+u_n^2}$ tendent donc vers 0, ce qui n'empêche pas la suite de diverger. ■

Exemple 74 La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases}u_0=1\\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=u_n\mathrm{e}^{-u_n}\end{cases}$ converge vers 0.

Démonstration

Par récurrence immédiate, $u_n>0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, puisque $\mathbb{R}_+^*$ est stable par $x\longmapsto xe^{-x}$. Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $e^{-u_n}<1$ et donc $u_{n+1}-u_n=u_n\left(e^{-u_n}-1\right)<0$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0, elle converge donc vers un réel $\ell\geqslant 0$. En passant à la limite dans $u_{n+1}=u_ne^{-u_n}$, il vient $\ell=\ell e^{-\ell}$, soit $\ell\left(1-e^{-\ell}\right)=0$, et donc $\ell=0$. ■

Proposition 75 (Monotonie d'une suite récurrente)

Soient $f:A\longrightarrow A$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant $u_0\in A$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=f(u_n)$. Le signe de $x\longmapsto f(x)-x$ nous renseigne sur la monotonie de la suite.

(i) Si $\forall x\in A,\ f(x)\geqslant x$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

(ii) Si $\forall x\in A,\ f(x)\leqslant x$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

La monotonie de f nous renseigne sur la monotonie de la suite.

(iii) Si f est croissante alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **monotone**. Son sens de variation est déterminé par u_1-u_0.

(iv) Si f est décroissante alors $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont **monotones de sens contraire**. Leurs sens de variation sont déterminés par u_2-u_0.

Démonstration

(i) Si $f(x)\geqslant x$ pour tout $x\in A$ alors pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}-u_n=f(u_n)-u_n\geqslant 0$. Le point (ii) se démontre de même.

(iii) Si f est croissante, alors dans le cas où $u_0\leqslant u_1$, on montre par récurrence que la suite est croissante. En effet, $u_1\geqslant u_0$ et si pour $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}\geqslant u_n$, alors, en composant par f, il vient $u_{n+2}\geqslant u_{n+1}$.

(iv) La fonction $f\circ f$ est croissante comme composée de deux fonctions décroissantes, et $u_{2n+2}=f\circ f(u_{2n})$, $u_{2n+3}=f\circ f(u_{2n+1})$ pour tout $n\in\mathbb{N}$: d'après le point précédent, $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones. Elles sont de sens contraires : si par exemple $u_0\leqslant u_2$, alors $u_1=f(u_0)\geqslant f(u_2)=u_3$ par décroissance de f, donc $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (et inversement si $u_0\geqslant u_2$). ■

⚠ Les informations comme « $f(x)\geqslant x$ » et « f est croissante » ne peuvent être exploitées que sur un domaine stable.

Exemple 76 Considérons $\begin{cases}u_0=-2\\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=u_n^2\end{cases}$. La fonction $x\longmapsto x^2$ est décroissante sur $\mathbb{R}_-$ mais cela n'a aucun impact sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quitte $\mathbb{R}_-$ dès le rang 1.

Proposition 77 (Limite d'une suite récurrente convergente)

Soient $f:A\longrightarrow A$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant $u_0\in A$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=f(u_n)$. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CONVERGE vers $\ell\in A$ et f est CONTINUE en ℓ alors ℓ est un point fixe de f : $f(\ell)=\ell$.

En pratique

Pour étudier une suite récurrente $u_{n+1}=f(u_n)$, on peut suivre les étapes suivantes.

(i) **Dessin :** tracer le graphe de f et la droite $y=x$, puis placer les premiers termes : on obtient une conjecture.

(ii) **Points fixes :** étudier le signe de $\varphi:x\longmapsto f(x)-x$. Ses zéros sont les points fixes de f. Si f est continue, ce sont les seules limites finies possibles de la suite parmi les points où f est définie.

(iii) **Intervalle stable :** chercher un intervalle I stable par f qui contient u_0, ou seulement u_N pour un certain rang N si l'ensemble de départ n'est pas stable. Les points fixes sont de bons candidats pour les extrémités : si f est croissante et si $\alpha<\beta$ sont deux points fixes, alors $f([\alpha,\beta])\subset[\alpha,\beta]$.

(iv) **Monotonie :** sur I,
- si φ est de signe constant, la suite est monotone, car $u_{n+1}-u_n=\varphi(u_n)$;
- si f est croissante, la suite est monotone, de sens donné par le signe de u_1-u_0 ;
- si f est décroissante, $f\circ f$ est croissante : $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont récurrentes pour $f\circ f$, donc monotones, de sens contraires. On reprend alors l'étude avec $f\circ f$, dont les points fixes remplacent ceux de f.

(v) **Limite :** conclure avec le théorème de la limite monotone et la Proposition 77.

Exemple 78 On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0=0$ et $u_{n+1}=\ln(u_n+3)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Étudier $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Démonstration

Posons $f : x \longmapsto \ln(x+3)$ et $\varphi : x \longmapsto f(x)-x$.

- **Points fixes :**
  La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et, pour tout $x \geq 0$, $\varphi'(x)=\dfrac{1}{x+3}-1=-\dfrac{x+2}{x+3}<0$. De plus, $\varphi(0)=\ln 3>0$ et $\varphi(x)=x\left(\dfrac{\ln(x+3)}{x}-1\right)\xrightarrow[x\longrightarrow+\infty]{}-\infty$ par croissances comparées. La fonction φ s'annule donc exactement une fois sur $\mathbb{R}_+$, en un réel $\beta>0$: c'est l'unique point fixe positif de f, et $\varphi \geq 0$ sur $[0,\beta]$.

x	0	β	$+\infty$
$\varphi'(x)$	$-$	$-$	
$\varphi(x)$	$\ln 3$	0	$-\infty$

- **Intervalle stable :** f est croissante, donc $f([0,\beta])=[f(0),f(\beta)]=[\ln 3,\beta]\subset[0,\beta]$. Puisque $u_0=0\in[0,\beta]$, on a $u_n\in[0,\beta]$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
- **Monotonie :** f étant croissante, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. Son sens de variation exact n'est pas nécessaire pour conclure : une suite monotone et bornée converge, quel que soit son sens. Pour information, $\varphi \geq 0$ sur $[0,\beta]$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
- **Limite :** Monotone et bornée, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $\ell\in[0,\beta]$. Puisque f est continue, ℓ est un point fixe de f d'après la **Proposition 77**, donc $\ell=\beta$.

Ainsi $u_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} \beta$, où β est l'unique réel positif tel que $\ln(\beta+3)=\beta$. ■

Exemple 79 On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0=0$ et $u_{n+1}=\mathrm{e}^{-u_n}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Étudier $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Démonstration

Posons $f : x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$.

- **Intervalle stable :** f est décroissante, donc $f([0,1])=[f(1),f(0)]=\left[\mathrm{e}^{-1},1\right]\subset[0,1]$. Puisque $u_0\in[0,1]$, on a $u_n\in[0,1]$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
- **Monotonie :** f étant décroissante, les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones, de sens contraire. Leur sens de variation exact n'est pas nécessaire pour conclure : seules leur monotonie et leur caractère borné servent. Pour information, $u_2=\mathrm{e}^{-1}\geq u_0$, donc $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
- **Limites :** Monotones et bornées, elles convergent vers des réels $a,b\in[0,1]$. Puisque $u_{2n+2}=f\circ f(u_{2n})$ et $u_{2n+3}=f\circ f(u_{2n+1})$, et que $f\circ f$ est continue, a et b sont des points fixes de $f\circ f$ d'après la **Proposition 77**.
- **Points fixes de $f\circ f$:**
  Posons $h : x \longmapsto f\circ f(x)-x=\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}}-x$. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $h'(x)=\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}}-1=\mathrm{e}^{-\left(x+\mathrm{e}^{-x}\right)}-1<0$, puisque $\mathrm{e}^{-x}\geq 1-x$, c'est-à-dire $x+\mathrm{e}^{-x}\geq 1>0$. De plus, $h(0)=\mathrm{e}^{-1}>0$ et $h(1)=\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-1}}-1<0$. La fonction h s'annule donc exactement une fois sur $[0,1]$, en un réel ℓ : c'est l'unique point fixe de $f\circ f$ dans $[0,1]$, et donc $a=b=\ell$.

x	0	ℓ	1
$h'(x)$	$-$	$-$	
$h(x)$	e^{-1}	0	$\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-1}}-1$

- **Conclusion :** Les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite ℓ, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, et ℓ est un point fixe de f par continuité : $\mathrm{e}^{-\ell}=\ell$.

Ainsi $u_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} \ell$, où ℓ est l'unique réel tel que $\mathrm{e}^{-\ell}=\ell$. ■

VII) Théorème de Cesàro

Théorème 80 (Théorème de Cesàro)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $v_n = \dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k$. Pour tout $\ell\in\overline{\mathbb{R}}$:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \implies \lim_{n\to+\infty} v_n = \ell.$$

Démonstration

- **Cas $\ell\in\mathbb{R}$.** Quitte à remplacer $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $(u_n-\ell)_{n\in\mathbb{N}}$, on peut donc supposer $\ell=0$.
  Soit $\varepsilon>0$. Il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que $\forall n\geq N,\ |u_n|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. Pour tout $n\geq N$, en coupant la somme au rang N puis par inégalité triangulaire :
  $$|v_n| \leqslant \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{N-1}|u_k| + \frac{1}{n+1}\sum_{k=N}^{n}|u_k| \leqslant \frac{C}{n+1} + \frac{n-N+1}{n+1}\cdot\frac{\varepsilon}{2} \leqslant \frac{C}{n+1}+\frac{\varepsilon}{2},$$
  où $C=\sum_{k=0}^{N-1}|u_k|$ ne dépend pas de n. Comme $\dfrac{C}{n+1}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$, il existe $N'\geq N$ tel que $\forall n\geq N',\ \dfrac{C}{n+1}<\dfrac{\varepsilon}{2}$, et donc $\forall n\geq N',\ |v_n|<\varepsilon$. Ainsi $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$.
- **Cas $\ell=+\infty$.** Soit $A>0$. Il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que $\forall n\geq N,\ u_n>2A$. Pour tout $n\geq N$:
  $$v_n = \frac{C}{n+1}+\frac{1}{n+1}\sum_{k=N}^{n}u_k \geq \frac{C}{n+1}+\frac{n-N+1}{n+1}\cdot 2A = w_n,$$
  où $C=\sum_{k=0}^{N-1}u_k$ ne dépend pas de n. Or $\dfrac{C}{n+1}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ et $\dfrac{n-N+1}{n+1}\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$, donc $w_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}2A>A$: il existe $N'\in\mathbb{N}$ tel que $\forall n\geq N',\ w_n>A$. Pour tout $n\geq\max\{N,N'\}$, on a alors $v_n\geq w_n>A$. Ainsi $\lim_{n\to+\infty} v_n=+\infty$.
- **Cas $\ell=-\infty$.** La suite $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, et la moyenne de ses $n+1$ premiers termes vaut $-v_n$. Le cas précédent donne donc $\lim_{n\to+\infty}(-v_n)=+\infty$, c'est-à-dire $\lim_{n\to+\infty} v_n=-\infty$. ■

⚠ La réciproque est fausse : pour $u_n=(-1)^n$, $v_n=\dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k$ vaut $\dfrac{1}{n+1}$ si n est pair et 0 sinon, donc $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$, alors que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite.

Exemple 81 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0=1 \\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=u_n+\dfrac{1}{u_n}\end{cases}$. Alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2n}$.

Démonstration

Une récurrence immédiate montre que u_n est bien défini et que $u_n\geq 1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$; la suite est croissante puisque $u_{n+1}-u_n=\dfrac{1}{u_n}>0$. Si elle convergeait, sa limite $\ell\geq 1$ vérifierait, par continuité de $x\longmapsto x+\dfrac{1}{x}$ en ℓ, $\ell=\ell+\dfrac{1}{\ell}$, ce qui est absurde. D'après le théorème de la limite monotone, $\lim_{n\to+\infty} u_n=+\infty$.

Posons alors $w_k=u_{k+1}^2-u_k^2=2+\dfrac{1}{u_k^2}$: $w_k\xrightarrow[k\to+\infty]{}2$. Par le théorème de Cesàro, et parce que la somme est télescopique : $\dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}w_k=\dfrac{u_{n+1}^2-u_0^2}{n+1}=\dfrac{u_{n+1}^2-1}{n+1}\xrightarrow[n\to+\infty]{}2$. Comme $\dfrac{1}{n+1}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$, on en déduit $\dfrac{u_{n+1}^2}{n+1}\xrightarrow[n\to+\infty]{}2$, c'est-à-dire $\dfrac{u_n^2}{n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}2$, et par continuité de la racine carrée : $\dfrac{u_n}{\sqrt{2n}}\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$, c'est-à-dire $u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\sqrt{2n}$. ■

VIII) Caractérisations séquentielles et densité

Le théorème d'encadrement permet d'obtenir la caractérisation séquentielle de la borne supérieure, qui offre souvent une approche plus simple pour déterminer la borne supérieure d'un ensemble.

Proposition 82 (Caractérisation séquentielle de la borne supérieure/inférieure)

Soient A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}$.

(i) $M = \sup A \iff \begin{cases} M \text{ majore } A \\ M \text{ est la limite d'une suite d'éléments de } A. \end{cases}$

(ii) $\sup A = +\infty \iff A$ n'est pas majorée $\iff$ il existe une suite d'éléments de A qui tend vers $+\infty$.

On a des résultats analogues pour la borne inférieure.

Démonstration

(i)
- Si $M = \sup A$, alors M majore A. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $M - \dfrac{1}{n}$ ne majore pas A par définition de la borne supérieure. On peut donc trouver $a_n \in A$ tel que $M - \dfrac{1}{n} \leqslant a_n \leqslant M$. Par le théorème d'encadrement, $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} M$.
- Réciproquement, supposons qu'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers M, avec M majorant A. Pour tout majorant M' de A, on a $a_n \leqslant M'$ pour tout n, donc par passage à la limite $M \leqslant M'$. Ainsi M est le plus petit des majorants de A, c'est-à-dire $M = \sup A$.

(ii) On sait déjà que $\sup A = +\infty \iff A$ n'est pas majorée.
Si A n'est pas majorée, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $a_n \in A$ tel que $a_n \geq n$. Par le théorème de minoration, $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. La réciproque est évidente. ■

Exemple 83 Si l'on note A l'ensemble $\left\{\dfrac{q^2}{2^p+q}\right\}_{p,q\in\mathbb{N}^*}$, alors A n'est pas majoré, et $\inf A = 0$.

Démonstration

D'abord, A n'est pas majoré car il contient une suite de limite $+\infty$: $\dfrac{n^2}{2^1+n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Montrons maintenant que $\inf A = 0$. D'une part $\dfrac{q^2}{2^p+q} \geq 0$ pour tous $p, q \in \mathbb{N}^*$, donc A est minoré par 0 ; d'autre part $\dfrac{1}{2^n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc A contient une suite de limite 0 : par caractérisation séquentielle de la borne inférieure, $\inf A = 0$. ■

Définition 84 (Densité)

Soit $A \subset \mathbb{R}$. On dit que A est **dense dans** $\mathbb{R}$ si tout intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ rencontre A.
Autrement dit, A est dense dans $\mathbb{R}$ si entre deux réels distincts on peut toujours trouver un élément de A.

Proposition 85 (Caractérisation séquentielle de la densité)

Soit $A \subset \mathbb{R}$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(i) A est dense dans $\mathbb{R}$; (ii) Tout réel est limite d'une suite d'éléments de A.

Démonstration

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons A dense dans $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $a_n \in A$ tel que $x < a_n < x + \dfrac{1}{n}$, par densité de A. Donc, par encadrement, $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que tout réel est limite d'une suite d'éléments de A. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$. Posons $z = \dfrac{x+y}{2}$ et $\varepsilon = \dfrac{y-x}{2} > 0$. Comme z est limite d'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|a_N - z| < \varepsilon$, c'est-à-dire $z - \varepsilon < a_N < z + \varepsilon$, ce qui donne $x < a_N < y$. Ainsi $a_N \in]x, y[\cap A$, ce qui montre que A est dense dans $\mathbb{R}$. ■

Définition 86 (Nombre décimal)

On appelle **nombre décimal** tout rationnel de la forme $\frac{p}{10^n}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Proposition 87 (Approximations décimales d'un réel)

Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons

$$a_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \qquad \text{et} \qquad b_n = a_n + \frac{1}{10^n}.$$

On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leqslant x < b_n$, et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont à valeurs décimales, de limite commune x.
En particulier, tout $x \in \mathbb{R}$ est limite de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de décimaux : l'ensemble des décimaux est donc dense dans $\mathbb{R}$.

Démonstration

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Par définition de la partie entière, $10^n x - 1 < \lfloor 10^n x \rfloor \leqslant 10^n x < \lfloor 10^n x \rfloor + 1$. En divisant par 10^n, on obtient $x - \frac{1}{10^n} < a_n \leqslant x < b_n$. Le théorème d'encadrement donne $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$. Par somme de limites, $b_n = a_n + \frac{1}{10^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$. ■

Proposition 88 (Densité des rationnels et des irrationnels)

Les ensembles $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

Démonstration

L'ensemble des décimaux est dense dans $\mathbb{R}$, donc $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Montrons que $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $c_n = a_n + \frac{\sqrt{2}}{n}$, où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite de décimaux ci-dessus associée à x.

Comme a_n est rationnel et $\frac{\sqrt{2}}{n}$ irrationnel, c_n est irrationnel, comme somme d'un rationnel et d'un irrationnel.

De plus, $\frac{\sqrt{2}}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc $c_n = a_n + \frac{\sqrt{2}}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} x + 0 = x$ par somme de limites.
Ainsi tout réel x est limite d'une suite d'irrationnels : $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. ■