La rédaction mathématique

I) Universelle

Exercice 1 — Montrer que, pour tout $x \geq 1$, $x^2 \geq x$.

II) Existentielle

Exercice 2 — Montrer que : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n \in \mathbb{N},\ \dfrac{1}{n} < \varepsilon$.

III) Disjonction de cas

Exercice 3 — Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x-1| \leqslant x^2 - x + 1$.

Exercice 4 — Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{n(n+1)}{2}$ est un entier naturel.

IV) Implication

Exercice 5 — Montrer que si $n \in \mathbb{N}$ est pair, alors n^2 est pair.

V) Équivalence

Exercice 6 — Montrer que n est pair si et seulement si n^2 est pair.

VI) Unicité

Exercice 7 — Montrer qu'une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ possède au plus un maximum.

VII) Contraposée

Exercice 8 — Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad |a| \leqslant \varepsilon \Longrightarrow a = 0.$$

VIII) Raisonnement par l'absurde

Exercice 9 — On définit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$. Montrer que $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 10 — Trouver l'unique fonction strictement croissante $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ telle que $\forall x \in [0,1],\quad f(f(x)) = x$.

IX) Récurrence

Exercice 11 — Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $2^{n-1} \leqslant n! \leqslant n^n$.

Exercice 12 — Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété suivante : $P_n : 2^n > n^2$.

1) Montrer que l'implication $P_n \Longrightarrow P_{n+1}$ est vraie pour $n \geq 3$.
2) Montrer par récurrence que la propriété P_n est vraie à partir d'un certain rang que vous déterminerez.

X) Analyse-Synthèse

Exercice 13 — Montrer par analyse-synthèse que toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est la somme, d'une unique manière, d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Exercice 14 — Déterminer par analyse-synthèse toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$$