LA RÉDACTION MATHÉMATIQUE

Table des matières

I Quelques règles de rédaction **2**
A - Utiliser des connecteurs logiques . . . 2
B - Ne pas mélanger le français et les symboles logiques . . . 2
C - Annoncer ce qu'on va faire . . . 3

II La précision mathématique **3**
A - Introduire ou nommer un objet . . . 3
B - Distinguer une fonction de sa valeur . . . 3
C - Citer une définition ou un théorème avec précision . . . 4

III Adapter la rédaction à la proposition **4**
A - Montrer une conjonction et une disjonction . . . 4
B - Montrer une implication ou une équivalence . . . 4
C - Montrer une proposition universelle . . . 5
D - Montrer l'existence d'un objet . . . 6
E - Montrer l'unicité . . . 6
F - Montrer une inclusion ou une égalité d'ensembles . . . 7

IV Raisonnements plus avancés **7**
A - Raisonnement par disjonction de cas . . . 7
B - Raisonnement par contraposition . . . 8
C - Raisonnement par l'absurde . . . 8
D - Raisonnement par récurrence . . . 9
E - Raisonnement par analyse-synthèse . . . 11

Le but de ce document est de vous donner de bonnes habitudes de rédaction mathématique.

Au lycée, la rédaction peut facilement donner l'impression d'être une contrainte un peu artificielle : on vous demande d'écrire des phrases, de justifier vos calculs, de soigner la présentation, alors que, de votre point de vue, vous avez parfois déjà fait l'essentiel en trouvant la bonne réponse. Pourtant, plus les mathématiques deviennent difficiles, plus la rédaction prend de l'importance.

En études supérieures, on ne vous demande plus seulement de savoir calculer. On vous demande surtout de raisonner : partir d'hypothèses, introduire des objets, utiliser des résultats, faire des choix, enchaîner des arguments et finalement parvenir à une conclusion. Une solution mathématique n'est donc pas seulement une réponse : c'est un raisonnement qu'il faut pouvoir suivre et vérifier.

Rédiger sert autant à transmettre un raisonnement qu'à vérifier, en l'écrivant, qu'il est valide : c'est ce qui explique les exigences qui suivent.

- **Être lisible.** Le lecteur doit pouvoir suivre le raisonnement sans être gêné par la forme : notations, formulations types, façon d'organiser une preuve. Une copie mal présentée oblige à déchiffrer avant de comprendre, ce qui détourne l'attention des idées qu'on veut transmettre.
- **Être précis et complet.** Chaque objet, chaque notation, chaque affirmation doit avoir un sens clair, sans ambiguïté, et aucune étape ne doit être laissée à deviner. Écrire « ça converge » sans dire vers quoi, dans quel sens, ni pour quelle suite, laisse trop de place à l'interprétation : une telle phrase passe à côté des subtilités, et cache souvent un manque de maîtrise autant qu'elle n'aide le lecteur à suivre.
- **Être rigoureux.** Les hypothèses, les justifications, les conditions pour utiliser un résultat doivent apparaître quand c'est nécessaire. Utiliser un résultat sans vérifier ses hypothèses, c'est avoir raison par hasard : le raisonnement peut être faux sans que vous le sachiez vous-même.
- **Structurer sa pensée.** On dit souvent que le langage aide à réfléchir : c'est vrai aussi en maths. On peut commencer à rédiger un exercice en ne connaissant que la structure du raisonnement : « Supposons... », « Montrons que... », « Donc... ». Poser cette structure avant même d'avoir tout résolu organise la pensée et permet de se concentrer sur des problèmes plus élémentaires.

Sachant cela, comment savoir, concrètement, si une rédaction est bonne ? Voici quelques repères, qui permettent de s'auto-évaluer aussi bien que de comprendre ce qu'on attend de vous.

- **Un camarade du même niveau vous suit sans effort.** Donnez votre copie à quelqu'un qui maîtrise le cours et regardez s'il peut la lire d'une traite. S'il doit s'arrêter, revenir en arrière, ou vous demander « qu'est-ce que tu as fait là ? », c'est qu'une étape manque ou qu'un raccourci a été pris trop vite. À l'inverse, un raisonnement bien rédigé se lit sans accroc, même sur un point difficile.
- **Chaque affirmation logique a sa traduction attendue.** Les mathématiques ont un vocabulaire précis pour passer d'une affirmation à sa rédaction : vouloir montrer $\forall x,\ P(x)$ appelle un « Soit x » quelque part dans le texte ; montrer une implication commence par « Supposons... » ; montrer une existence se termine par la construction ou l'exhibition d'un objet. Un lecteur habitué à ces codes voit d'un coup d'œil la structure du raisonnement — et remarque tout aussi vite quand l'un de ces codes manque.
- **Le raisonnement s'explique lui-même.** Une bonne rédaction ne laisse pas le lecteur deviner pourquoi une étape est valide : l'essentiel de la justification doit être écrit, pas seulement pensé. Il faut toutefois distinguer deux types d'étapes. Les manipulations techniques (permuter des termes, factoriser, développer) sont des opérations licites en elles-mêmes et n'ont pas besoin d'être commentées. Les justifications de fond, en revanche — « car x est positif », « car f est continue » — sont ce qui rend l'étape légitime, et doivent donc apparaître explicitement.
- **La présentation structure le raisonnement.** Une rédaction claire se reconnaît aussi à l'œil : des sauts de ligne entre les grandes étapes, les résultats et arguments importants encadrés ou mis en valeur, une structure qu'on peut deviner rien qu'en survolant la page — une récurrence, par exemple, où l'on voit tout de suite où finit l'initialisation et où commence l'hérédité. Ce n'est pas un détail cosmétique : la même démonstration, mal présentée, devient nettement plus difficile à suivre.

La rédaction mathématique n'est donc pas une couche que l'on ajoute à la fin d'un raisonnement pour faire une « jolie copie ». Elle fait partie du raisonnement lui-même. Les conventions et les habitudes présentées dans la suite du document ont justement pour objectif de vous aider à rendre vos raisonnements plus clairs, plus précis et plus faciles à construire.

I) Quelques règles de rédaction

A - Utiliser des connecteurs logiques

Des petits mots simples suffisent à rendre un raisonnement lisible en explicitant comment une phrase s'articule avec la précédente :

donc, ainsi, par conséquent, d'où (pour exprimer une conséquence) ;
en outre, de plus (pour ajouter une information) ;
mais, cependant (pour marquer une opposition) ;
car, puisque, comme (pour exprimer une cause ou une justification) ;
or (pour introduire un fait ou un élément nouveau).

Une suite de calculs sans aucun de ces mots ne constitue pas un raisonnement : le lecteur ne voit pas où vous voulez en venir, même si chaque ligne est juste.

B - Ne pas mélanger le français et les symboles logiques

Une phrase se rédige soit entièrement en français, soit entièrement en symboles, jamais un mélange des deux : on n'utilise pas $\forall$ ou $\exists$ pour remplacer « pour tout » ou « il existe » au milieu d'une phrase française.

Exemple 1 On peut écrire « la somme de deux entiers est un entier » ou $\forall m, n \in \mathbb{Z},\ m+n \in \mathbb{Z}$, mais pas « $\forall m, n \in \mathbb{Z}$, la somme de m et n est un entier ».

Le symbole $\in$ fait exception : « Soit $x \in E$ » est une formulation courante et acceptée, qui remplace « Soit x un élément de E ».

Les symboles $\Longrightarrow$ et $\Longleftrightarrow$ portent sur des propositions : ce ne sont pas des mots de liaison permettant d'enchaîner les étapes d'un raisonnement. On ne les utilise donc pas comme des abréviations de « donc », « ainsi », « par conséquent » ou « c'est-à-dire ». Quand vous écrivez « p est vraie, donc q est vraie », il faut écrire le mot « donc » (ou « ainsi », « par conséquent »...), et non une flèche $\Longrightarrow$.

Ce n'est d'ailleurs pas seulement une question de forme : les deux écritures n'ont pas le même sens. L'écriture $p \Longrightarrow q$ affirme seulement que p entraîne q ; elle ne dit ni que p est vraie, ni que q l'est. À l'inverse, « p est vraie, donc q est vraie » affirme que p est vraie et que l'on en déduit que q est vraie.

Réservez donc $\Longrightarrow$ aux énoncés de définitions ou de théorèmes, lorsque c'est bien l'implication elle-même que vous affirmez. De même, $\Longleftrightarrow$ ne remplace pas « c'est-à-dire » entre deux propositions vraies : lorsque vous reformulez une proposition, écrivez « c'est-à-dire » ou « *i.e.* ».

C - Annoncer ce qu'on va faire

Avant de vous lancer dans une démonstration, annoncez en une phrase ce que vous vous apprêtez à faire lorsque cela apporte de la clarté : « Montrons que… », « Raisonnons par l'absurde : supposons que… », « Il reste à établir que… ». Cette annonce n'est pas nécessaire lorsque la méthode est déjà évidente ou imposée par l'énoncé : si l'on vous demande explicitement de démontrer une propriété par récurrence, inutile d'écrire « Montrons par récurrence que… ». En revanche, lorsque la démarche n'est pas immédiatement identifiable, une courte phrase permet de rendre le raisonnement plus clair et plus facile à suivre.

II) La précision mathématique

A - Introduire ou nommer un objet

Avant d'utiliser un objet dans une démonstration — un nombre, une fonction, un ensemble — il faut l'introduire : dire d'où il vient, à quel type d'objet il appartient, et éventuellement quelles propriétés on lui suppose. Un objet qui apparaît dans un calcul sans avoir été introduit est une des sources d'ambiguïté les plus fréquentes.

Quand une expression un peu longue revient plusieurs fois dans une preuve, on lui donne un nom pour alléger l'écriture. Deux verbes pour deux gestes différents : **on pose** $K = \dots$ quand on *choisit* une valeur qui n'existait pas avant ; **on note** f la fonction … quand on donne un nom à un objet déjà entièrement déterminé par le contexte, pour raccourcir l'écriture.

Si la quantité posée dépend d'un paramètre déjà introduit, comme α, mieux vaut le faire apparaître dans le nom (écrire K_α plutôt que K) pour ne pas perdre de vue cette dépendance.

⚠ Dire ou vouloir qu'un objet existe ne suffit pas à le faire exister : toute expression du type « On note x l'unique objet tel que… » suppose implicitement que cet objet existe, ce qui se démontre, ne se décrète pas. Le raisonnement suivant est ainsi vide de sens : « Notons N le plus grand entier naturel. Alors $N^2 \geq N$, donc N^2 est un entier naturel plus grand que N : contradiction. » — N n'a jamais existé, la contradiction ne prouve donc rien.

Si je vous dis qu'il a gagné sa dernière compétition de danse, vous vous demanderez très certainement qui est « il ». Tout comme j'aurais dû introduire la personne dont je parlais, il faut correctement introduire une variable en mathématiques.

- **Nommer une quantité.** En maths, certaines quantités jouent un rôle particulier : par exemple, les racines d'un polynôme du second degré, que l'on va manipuler à plusieurs reprises. Plutôt que de réécrire à chaque fois cette quantité — qui peut parfois être pénible à écrire, comme $\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ — on se donne le droit de lui attribuer un nom pour y faire référence plus simplement par la suite. Pour nommer une quantité, on pourra par exemple écrire :

> Posons $\alpha = \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ou encore Notons α le réel $\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

- **Introduire une variable quelconque.** Souvent, on manipulera des variables qui n'ont pas de valeur fixe précise, mais qui représentent tout un ensemble de valeurs possibles. Par exemple, pour montrer que le carré de tout réel est positif, on pourra écrire :

> Soit $x \in \mathbb{R}$:
> ⋮ ← déductions vraies, quel que soit x

B - Distinguer une fonction de sa valeur

Une fonction f et sa valeur en un point $f(x)$ sont deux objets différents : f est l'objet qui, à un x, associe $f(x)$, alors que $f(x)$ n'est qu'un nombre. Une expression algébrique comme $\dfrac{x}{x^2+1}$ n'est donc pas une fonction en soi : c'est la fonction $x \longmapsto \dfrac{x}{x^2+1}$ qui l'est. Ne dites donc pas « la fonction $\dfrac{x}{x^2+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ », mais « la fonction $x \longmapsto \dfrac{x}{x^2+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ ».

Définir une fonction

Pour définir une fonction, on utilisera l'une des formulations suivantes :

- « On note f la fonction $\begin{cases} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt{x} \end{cases}$. »
- « On note f la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}_+$. »
- « On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) = \sqrt{x}$. »
- « On pose pour tout $x \in \mathbb{R}_+$: $f(x) = \sqrt{x}$. »

C - Citer une définition ou un théorème avec précision

Pour utiliser un théorème, il faut vérifier que toutes ses hypothèses sont satisfaites et le préciser explicitement dans la rédaction : un théorème mal cité ou une hypothèse oubliée sera souvent pénalisé.

Exemple 2 Montrer que $f(x) = x^3 + x - 1$ s'annule en un unique point de $\mathbb{R}$.

Rédaction insuffisante : « $f(0) = -1$ et $f(1) = 1$ donc f s'annule sur $\mathbb{R}$, par le théorème des valeurs intermédiaires. » Rien n'indique que f est continue, ni pourquoi le zéro serait unique.

Rédaction correcte : « f est continue sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions continues, et strictement croissante comme somme de fonctions croissantes dont une strictement. De plus $f(0) = -1 < 0 < 1 = f(1)$. Par le théorème de la bijection, f s'annule donc en un unique point de $\mathbb{R}$. »

III) Adapter la rédaction à la proposition

A - Montrer une conjonction et une disjonction

On commence par le plus simple, la conjonction.

> Pour démontrer une proposition du type « P et Q », on écrit :
>
> Montrons que P.
>
> ⋮
>
> Montrons que Q.
>
> ⋮

Exemple 3 Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\min\left(x^2 - 2x + 3,\, 2x^2 + 2x + 3\right) \geq 2$.

Démonstration

Montrons que $x^2 - 2x + 3 \geq 2$. On a $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \geq 0$, donc $x^2 - 2x + 3 \geq 2$.

Montrons que $2x^2 + 2x + 3 \geq 2$. On a $2x^2 + 2x + 1 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \geq 0$, donc $2x^2 + 2x + 3 \geq 2$. ■

La proposition « P ou Q » est vraie exactement lorsqu'au moins l'une des deux propositions P ou Q est vraie. Il s'agit donc de montrer que, si l'une des deux propositions est fausse, alors l'autre est vraie.

> Pour démontrer une proposition du type « P ou Q », on écrit :
>
> Supposons que P est fausse et montrons que Q.
>
> ⋮

Exemple 4 Soit $n \geq 3$. Alors, n n'est pas premier ou n est impair.

Démonstration

Supposons que n est un nombre premier.
Alors, puisque $n \geq 3$, on a $n \neq 2$. Et comme 2 est le seul entier premier pair, on en déduit que n est impair. ■

Exemple 5 Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons que

$$\max\left\{|\sin x|, |\cos x|\right\} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Démonstration

Il s'agit de montrer que $|\sin x| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ ou $|\cos x| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$. Supposons que $|\sin x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$, ce qui implique $\sin^2 x < \frac{1}{2}$.

Comme $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, on obtient alors $\cos^2 x > \frac{1}{2}$, donc $|\cos x| > \frac{1}{\sqrt{2}}$. ■

B - Montrer une implication ou une équivalence

Une proposition « $P \Longrightarrow Q$ » est vraie lorsque, dès que P est vraie, Q doit également être vraie. Or, les propositions « $P \Longrightarrow Q$ » et « (non P) ou Q » sont équivalentes. Cela rejoint la méthode de la disjonction : pour montrer que « (non P) ou Q » est vraie, on peut supposer que « (non P) » est fausse, c'est-à-dire que P est vraie, puis montrer que Q est vraie.

Pour démontrer une proposition du type « $P \Longrightarrow Q$ », on écrit :

Supposons P.
Montrons que Q.
$\vdots$

Exemple 6 On veut montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad x^2 = 1 \implies x = 1$ ou $x = -1$.

Démonstration

Supposons que $x^2 = 1$. Alors $\quad x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = 0$, $\quad$ donc $x - 1 = 0$ ou $x + 1 = 0$. Ainsi, $x = 1$ ou $x = -1$. ■

Raisonner directement par équivalences permet souvent d'obtenir des preuves plus rapides et plus élégantes, au prix d'une difficulté supplémentaire : il faut vérifier à chaque étape que le raisonnement fonctionne bien dans les deux sens. Cette méthode est donc plutôt à privilégier pour les preuves simples ou, par exemple, pour les résolutions d'équations.

Comme nous sommes naturellement amenés à raisonner par implications, je vous conseillerai cependant de privilégier, de manière générale, le raisonnement par double implication.

Pour démontrer une proposition du type « $P \Longleftrightarrow Q$ », on écrit :

Montrons que $P \Longrightarrow Q$.
$\vdots$
Montrons que $Q \Longrightarrow P$
$\vdots$

Exemple 7 On veut montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $x^2 + y^2 = 0 \Longleftrightarrow x = y = 0$.

Démonstration

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que $x^2 + y^2 = 0$. Alors $\quad x^2 = -y^2$. Or $x^2 \geq 0$ et $-y^2 \leqslant 0$. Ainsi, x^2 est à la fois positif et négatif, donc $x^2 = 0$ et $y^2 = 0$. D'où $x = 0$ et $y = 0$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que $x = y = 0$. Alors $\quad x^2 + y^2 = 0^2 + 0^2 = 0$. ■

Enfin, voici deux façons de procéder lorsqu'on veut montrer une double équivalence.

Pour montrer une proposition du type « $P \Longleftrightarrow Q \Longleftrightarrow R$ », on peut, au choix :
- Montrer que « $P \Longleftrightarrow Q$ » et « $Q \Longleftrightarrow R$ ».
- Montrer que « $P \Longrightarrow Q$ », « $Q \Longrightarrow R$ » et « $R \Longrightarrow P$ ».

C - Montrer une proposition universelle

Pour démontrer une proposition universelle, il faut montrer que la propriété est vraie pour tout élément de l'ensemble considéré. On se donne donc un élément quelconque de cet ensemble et on montre que la propriété est vérifiée pour cet élément.

Pour démontrer une proposition du type « $\forall x \in E,\ P(x)$ » , on écrit :

Soit $x \in E$.
Montrons que $P(x)$.
$\vdots$

Exemple 8 On veut montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\dfrac{x}{x^2+1} \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Démonstration

Soit $x \in \mathbb{R}$. Remarquons que $x^2 + 1 > 0$. De plus, $\quad \dfrac{x}{x^2+1} \leqslant \dfrac{1}{2} \Longleftrightarrow 2x \leqslant x^2 + 1 \Longleftrightarrow \underbrace{(x-1)^2 \geq 0}_{\text{toujours vrai}}$.

Donc, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\quad \dfrac{x}{x^2+1} \leqslant \dfrac{1}{2}$. ■

D - Montrer l'existence d'un objet

Pour démontrer une proposition du type « $\exists x \in E,\ P(x)$ » , on cherche un candidat et on écrit :

Posons $x = \ldots$
Montrons $P(x)$.
$\vdots$

Exemple 9 On veut montrer que $\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \geq 0,\quad \mathrm{e}^{\sqrt{x}} > y^2 + 1$.

Démonstration

Recherche. On cherche, pour un $y \in \mathbb{R}$ fixé, une valeur de x qui permette de satisfaire l'inégalité. On part donc de

$$\mathrm{e}^{\sqrt{x}} > y^2 + 1 \iff \sqrt{x} > \ln(y^2+1) \iff x > \big(\ln(y^2+1)\big)^2.$$

La première équivalence est vraie car la fonction exponentielle est strictement croissante. La seconde est vraie car la fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et $\ln(y^2+1) \geq 0$.
Il est possible de conclure proprement à partir de cette équivalence, mais on peut aussi se servir de cette équivalence comme un brouillon et ainsi poser un bon candidat.

Au propre. Soit $y \in \mathbb{R}$. Posons $x = \big(\ln(y^2+2)\big)^2$. Alors $x \geq 0$ et $\mathrm{e}^{\sqrt{x}} = \mathrm{e}^{|\ln(y^2+2)|} = y^2 + 2 \geq y^2 + 1$, car $y^2 + 1 \geq 1$, donc $\ln(y^2+1) \geq 0$. ■

E - Montrer l'unicité

En mathématiques, on étudie souvent l'unicité sans supposer l'existence d'un objet. Par unicité, on entend qu'il existe AU PLUS un objet qui vérifie la propriété. Il peut donc très bien en exister un ou zéro. Pour démontrer l'unicité des objets x vérifiant une propriété $P(x)$, on doit montrer la propriété suivante :

$$\forall x, y \in E,\quad P(x) \text{ et } P(y) \Longrightarrow x = y.$$

Pour démontrer l'unicité d'un objet vérifiant une propriété « $P(x)$ », on écrit :

Soit $x, y \in E$ tels que $P(x)$ et $P(y)$.
Montrons que $x = y$.
$\vdots$

Exemple 10 Il existe un et un seul $x \in \mathbb{R}_+$ tel que $x^2 = 1$.

Démonstration

- **Existence :** Posons $x = 1$. Alors x est positif et $x^2 = 1$.
- **Unicité :** Soient $x, y \in \mathbb{R}_+$ tels que $x^2 = y^2 = 1$. Alors $(x-y)(x+y) = x^2 - y^2 = 0$. D'où, $x = y$ ou $x = -y$.
  Si $x = -y$, alors, puisque $x, y \in \mathbb{R}_+$, x est à la fois positif et négatif, donc $x = y = 0$.
  On a donc $x = y$ dans les deux cas, d'où l'unicité. ■

L'exemple suivant, plus troublant, montre que l'on peut démontrer l'unicité d'un objet sans pour autant qu'il existe.

Exemple 11 Il y a au plus une solution à l'équation $\sqrt{x} = -1$ où $x \in \mathbb{R}_+$.

Démonstration

Si $x, y \in \mathbb{R}_+$ sont tels que $\sqrt{x} = \sqrt{y} = -1$, alors, en passant au carré on obtient $x = y$. À aucun moment on a affirmé que de tels objets existent, mais si c'était le cas, il n'y en aurait qu'un. ■

Lorsqu'on montre l'unicité, on ne suppose pas nécessairement que les deux objets x et y sont distincts. On le fait uniquement lorsque le raisonnement par l'absurde est nécessaire.

F - Montrer une inclusion ou une égalité d'ensembles

Pour démontrer une inclusion d'ensembles du type $E \subset F$ on écrit :

Soit $x \in E$.
Montrons que $x \in F$.
$\vdots$

Exemple 12 On note $2\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels pairs et on pose $E = \{k(k+1) \mid k \in \mathbb{N}\}$. Alors $E \subset 2\mathbb{N}$.
Cela revient à dire qu'un produit d'entiers consécutif est pair.

Démonstration
Soit $n \in E$, disons $n = k(k+1)$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$. Montrons que $n \in 2\mathbb{N}$. Or soit k est pair et $k+1$ impair, soit k est impair et $k+1$ pair, donc dans tous les cas, k ou $k+1$ est pair. Par produit, $n = k(k+1)$ l'est aussi, donc appartient à $2\mathbb{N}$. ■

Il y a deux stratégies pour démontrer une égalité d'ensemble du type $E = F$.
- On peut raisonner par double inclusion. Dans ce cas, on écrit :

  Montrons que $E \subset F$.
  $\vdots$
  Montrons que $F \subset E$.
  $\vdots$
- On peut raisonner par équivalences. Dans ce cas, on écrit :

  Pour tout x,
  $$x \in E \iff \cdots \iff \cdots \iff \cdots \iff x \in F.$$

Exemple 13 On veut montrer que $\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} \mid \forall y > 0,\ x \leqslant y\}$.

Démonstration
- Montrons que $\mathbb{R}_- \subset \{x \in \mathbb{R} \mid \forall y > 0,\ x \leqslant y\}$.
  Soit $x \in \mathbb{R}_-$. Nous devons montrer que $\forall y > 0,\ x \leqslant y$, mais c'est évident par hypothèse sur x.
- Montrons que $\{x \in \mathbb{R} \mid \forall y > 0,\ x \leqslant y\} \subset \mathbb{R}_-$.
  Soit $x \in \mathbb{R}$. On suppose que $\forall y > 0,\ x \leqslant y$. Montrons que x est négatif. Or si $x > 0$, alors pour $y = \dfrac{x}{2}$, on aurait $x \leqslant \dfrac{x}{2}$, donc $x = 2x - x \leqslant 0$. Comme voulu, x est négatif.

■

Exemple 14 Soient E et I deux ensembles et $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E. Alors
$$\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcap_{i \in I} \overline{A_i}.$$

Démonstration
Pour tout $x \in E$:
$$x \in \overline{\bigcup_{i \in I} A_i} \iff \text{non } \left(x \in \bigcup_{i \in I} A_i\right) \iff \text{non } (\exists i \in I,\ x \in A_i)$$
$$\iff \forall i \in I,\ \text{non } (x \in A_i) \iff \forall i \in I,\ x \in \overline{A_i} \iff x \in \bigcap_{i \in I} \overline{A_i}.$$
■

IV) Raisonnements plus avancés

A - Raisonnement par disjonction de cas

Montrer une proposition P par disjonction de cas consiste à distinguer plusieurs cas qui couvrent toutes les possibilités, puis à montrer que P est vraie dans chacun d'eux. On utilise cette méthode lorsque le contexte se décompose naturellement en plusieurs possibilités, chacune permettant de simplifier le problème. Par exemple, on peut distinguer selon qu'un réel est positif ou négatif, ou qu'un entier est pair ou impair.

Pour démontrer une proposition P par disjonction de cas, on écrit :

Premier cas : supposons que $\cdots$.
Montrons que P.

$\vdots$

Deuxième cas : supposons que $\cdots$.
Montrons que P.

$\vdots$

On a ainsi montré P dans tous les cas possibles, donc P est vraie.

Exemple 15 Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $\sqrt{x^2} = |x|$

Démonstration

- Si $x \geq 0$, alors $\sqrt{x^2} = x = |x|$.
- Si $x < 0$, alors $-x > 0$ et $\sqrt{x^2} = \sqrt{(-x)^2} = -x = |x|$.

■

B - Raisonnement par contraposition

Pour démontrer une implication « $P \Longrightarrow Q$ », il est parfois simple de montrer la contraposée « (non Q) $\Longrightarrow$ (non P) ».

Exemple 16 Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons par contraposée que si n^2 est impair, alors n est impair.

Démonstration

Par contraposée, supposons que n n'est pas impair. Donc n est pair.
Il existe alors un entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$.
En élevant au carré, on obtient :

$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$$

En posant $k' = 2k^2 \in \mathbb{N}$, on a $n^2 = 2k'$, ce qui prouve que n^2 est pair (donc non impair).
Par contraposée, si n^2 est impair, alors n est impair. ■

C - Raisonnement par l'absurde

Parfois, une proposition ne se prête pas à une preuve directe, on a besoin de supposer par l'absurde l'inverse de ce que l'on veut montrer afin d'exploiter cette hypothèse et montrer une contradiction.

Voici le principe d'un raisonnement par l'absurde :

- On suppose le contraire de ce que l'on veut montrer.
- On cherche à obtenir une contradiction.
- On conclut que notre hypothèse est fausse et donc que ce que l'on voulait montrer est vrai.

Exemple 17 Montrer que $\mathbb{N}$ ne possède pas de plus grand élément.

Démonstration

Supposons par l'absurde que $\mathbb{N}$ possède un plus grand élément, que l'on note N.
Alors $N + 1 \in \mathbb{N}$. De plus, $N + 1 > N$, ce qui contredit le fait que N soit le plus grand élément de $\mathbb{N}$.
Ainsi, $\mathbb{N}$ ne possède pas de plus grand élément. ■

On a tendance à confondre le raisonnement par contraposée et le raisonnement par l'absurde, alors que ces deux méthodes sont différentes. Dans le cas d'une implication $P \Longrightarrow Q$, plusieurs raisonnements sont possibles :

- on peut supposer P et montrer Q : c'est le **raisonnement direct** ;
- on peut supposer (non Q) et montrer (non P) : c'est le raisonnement par **contraposée** ;
- on peut supposer à la fois P et (non Q), puis chercher à obtenir une contradiction : c'est le **raisonnement par l'absurde**.

D - Raisonnement par récurrence

Récurrence simple

Soit P_n une proposition définie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Le raisonnement par récurrence est beaucoup utilisé pour montrer une proposition du type « $\forall n \geq n_0,\ P_n$ ». Il permet de formaliser un raisonnement qui se base sur le fait que P_n soit vraie pour montrer que P_{n+1} l'est. Le raisonnement par récurrence **simple** repose sur le principe suivant :

$$\text{Si } \ P_{n_0} \ \text{ et } \ \forall n \geq n_0,\ P_n \Longrightarrow P_{n+1} \qquad \text{alors} \qquad \forall n \geq n_0,\ P_n.$$

La rédaction d'une récurrence simple **doit** suivre le schéma suivant :

- On définit clairement la propriété P_n que l'on veut montrer par récurrence.
- **Initialisation :** On montre P_{n_0}.
- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0$. Supposons P_n et montrons P_{n+1}.

  $\vdots$

  Donc P_{n+1}.
- **Conclusion :** Par récurrence, on a donc $\forall n \geq n_0,\ P_n$.

On quantifie n en dehors de la proposition, en français : « pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $P_n : \ldots$ ». Écrire P_n : « $\forall n \in \mathbb{N}, \ldots$ » n'a pas de sens, car n y est muet : P_n ne dépendrait plus de n.

Exemple 18 Soit $x \in [-1, +\infty[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

Démonstration

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit P_n : "$(1+x)^n \geq 1 + nx$".

Initialisation : On a $(1+x)^0 = 1 \geq 1 + 0.x$ donc P_0.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Si P_n alors on a $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

Par hypothèse, $1 + x \geq 0$, donc en multipliant par $(1+x)$ on obtient

$$(1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x) = 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x$$

ce qui montre P_{n+1}.

Conclusion : Par récurrence, on a donc $\forall n \in \mathbb{N},\ P_n$.

■

Il est parfois nécessaire d'avoir un quantificateur $\forall x$ à l'intérieur de la proposition.

Exemple 19 On définit la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ u_0(x) = x \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}_+,\ u_{n+1}(x) = u_n(x^2).$$

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}_+,\ u_n(x) \geq 0$.

Démonstration

Initialisation : Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $u_0(x) = x \geq 0$. Ainsi, la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ u_n(x) \geq 0$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Comme $x^2 \in \mathbb{R}_+$, l'hypothèse de récurrence appliquée à x^2 donne $u_n(x^2) \geq 0$. Or $u_{n+1}(x) = u_n(x^2)$, d'où $u_{n+1}(x) \geq 0$. Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ u_{n+1}(x) \geq 0$.

Conclusion : Par récurrence simple, $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}_+,\ u_n(x) \geq 0$.

■

Récurrence double

Le raisonnement par récurrence **double** repose sur le principe suivant :

$$\text{Si } \ P_{n_0},\ P_{n_0+1} \ \text{ et } \ \forall n \geq n_0,\ (P_n \text{ et } P_{n+1}) \Longrightarrow P_{n+2} \quad \text{alors} \qquad \forall n \geq n_0,\ P_n.$$

La rédaction d'une récurrence double doit suivre le schéma suivant :
- On définit clairement la propriété P_n que l'on veut montrer par récurrence.
- **Initialisation :** On montre P_{n_0} et P_{n_0+1}.
- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0$. Supposons P_n et P_{n+1}. Montrons P_{n+2}.

  $\vdots$

  Donc P_{n+2}.
- **Conclusion :** Par récurrence double, on a donc $\quad \forall n \geq n_0, \ P_n$.

Exemple 20 On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 4, u_1 = 5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$. On a alors $u_n = 2^n + 3$.

Démonstration

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit P_n : "$u_n = 2^n + 3$".

Initialisation : On a $u_0 = 4 = 2^0 + 3$ et $u_1 = 5 = 2 + 3$. Donc P_0 et P_1 sont vraies.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Si P_n et P_{n+1} alors

$$u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n = 3(2^{n+1} + 3) - 2(2^n + 3) = 2^{n+2} + 3$$

donc P_{n+2} est vérifiée.

Conclusion : Par récurrence double, on a donc $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \ P_n$.

■

Récurrence forte

Le raisonnement par récurrence **forte** repose sur le principe suivant :

$$\text{Si} \quad P_{n_0} \quad \text{et} \quad \forall n \geq n_0, \ (\forall k \in [\![n_0; n]\!], \ P_k) \Longrightarrow P_{n+1} \quad \text{alors} \quad \forall n \geq n_0, \ P_n.$$

La rédaction doit suivre le schéma suivant :
- On définit clairement la propriété P_n que l'on veut montrer par récurrence.
- **Initialisation :** On montre P_{n_0}.
- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0$. Supposons que pour tout $k \in [\![n_0; n]\!]$ la propriété P_k est vraie et montrons P_{n+1}.

  $\vdots$

  Donc P_{n+1}.
- **Conclusion :** Par récurrence forte, on a donc $\quad \forall n \geq n_0, \ P_n$.

Exemple 21 On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} u_i$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 2^n$

Démonstration

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit P_n : "$u_n \leqslant 2^n$".

Initialisation : On a $u_0 = 1 \leqslant 2^0$ donc P_0.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Si pour tout $k \leqslant n$, P_k alors.

$$u_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} u_i \leqslant \sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1 \leqslant 2^{n+1}$$

Donc P_{n+1}.

Conclusion : Par récurrence forte, on a donc $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \ P_n$.

■

Sur le plan logique, la récurrence double et la récurrence forte ne constituent pas de nouveaux principes de démonstration. Elles peuvent toutes deux être ramenées à la récurrence simple.
Il suffit pour cela de considérer une propriété de récurrence adaptée :

- **Récurrence double :** on considère $Q(n)$: « $P(n)$ et $P(n+1)$ ».
- **Récurrence forte :** on considère $Q(n)$: « $\forall k \in [\![0;n]\!],\ P(k)$ ».

Dans les deux cas, on applique alors la récurrence simple à la propriété Q.

E - Raisonnement par analyse-synthèse

Lorsque l'on cherche à déterminer les éléments d'un ensemble E, il est possible de raisonner par analyse-synthèse. Le principe est de montrer $E = F$ où F est l'ensemble "mystère" exprimé plus explicitement que E.

Lorsqu'on fait un raisonnement par anaylse synthèse, la rédaction doit suivre le schéma suivant :

Analyse : Soit $x \in E$.
On cherche à utiliser les propriétés de E pour obtenir des informations sur la forme que x peut avoir.

Synthèse : Posons $x = \cdots$ (on écrit les formes possibles que l'on a trouvé).
Vérifions que $x \in E$.

Analyse $\longrightarrow$ Unicité Synthèse $\longrightarrow$ Existence

Exemple 22 Déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation $\sqrt{x+8} = x+2$ définie sur $[-8, +\infty[$.

Démonstration

Analyse : Soit $x \in [-8, +\infty[$ tel que $\sqrt{x+8} = x+2$. En élevant au carré, on obtient : $x+8 = (x+2)^2$, ce qui donne $x^2 + 3x - 4 = (x+4)(x-1) = 0$. Ainsi $x = -4$ ou $x = 1$.
Synthèse :

- Pour $x = -4$, on obtient $\sqrt{x+8} = \sqrt{4} = 2$ et $x+2 = -2$. Donc -4 n'est pas solution.
- Pour $x = 1$, on a $\sqrt{x+8} = \sqrt{9} = 3$ et $x+2 = 3$. Donc 1 est solution.

Finalement, l'unique solution est $x = 1$. ■

Exemple 23 Déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que : $\forall x, y \in \mathbb{R},\quad f(x+y) = x + f(y)$.

Démonstration

Analyse : Supposons que f soit une solution. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a $f(x+y) = x + f(y)$.
En prenant $y = 0$, on obtient $f(x) = x + f(0)$.
Donc il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = x + c$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Synthèse : Soit $c \in \mathbb{R}$ et définissons $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ par $f(x) = x + c$.
Alors, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $f(x+y) = x + y + c = x + (y + c) = x + f(y)$.
Donc f est bien solution.
L'ensemble des solutions est $\left\{ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \;\middle|\; \exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x + c \right\}$. ■