DEVOIR SURVEILLÉ 3

Fonctions circulaires réciproques, suites réelles, nombres complexes

Problème 1 — Les questions suivantes sont indépendantes.

1) Calculer $(2+i)(5+i)(8+i)$, puis montrer que $\operatorname{Arctan}\frac{1}{2}+\operatorname{Arctan}\frac{1}{5}+\operatorname{Arctan}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$.

2) Résoudre l'équation $\operatorname{Arcsin}x+\operatorname{Arcsin}(2x)=\frac{\pi}{2}$ d'inconnue $x\in\mathbb{R}$.

3) Résoudre l'équation $z^3=-4\overline{z}$ d'inconnue $z\in\mathbb{C}$.

4) Soit $x\in\mathbb{R}$. On pose $S_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{\sin(kx)}{2^k}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Montrer que $S_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac{2\sin x}{5-4\cos x}$.

5) On pose $A=\{\sqrt{k}-\lfloor\sqrt{k}\rfloor \mid k\in\mathbb{N}\}$. Déterminer $\sup A$ en utilisant la caractérisation séquentielle de la borne supérieure.

Problème 2 — On s'intéresse aux points fixes de l'exponentielle complexe, c'est-à-dire aux nombres complexes z tels que $e^z=z$. On note $\varphi:t\longmapsto te^{-t}$, définie sur $\mathbb{R}$, et on rappelle que $e^t\geqslant 1+t$ pour tout $t\in\mathbb{R}$.

1) Montrer que l'exponentielle complexe n'a aucun point fixe réel, et que si z est un point fixe, alors $\overline{z}$ aussi.

2) Soit $z=x+iy$ un point fixe de l'exponentielle, avec $x,y\in\mathbb{R}$ et $y>0$.

a) Identifier les parties réelle et imaginaire dans la relation $e^z=z$, puis montrer qu'il existe $k\in\mathbb{N}$ tel que

$$y=2k\pi+\operatorname{Arccos}\varphi(x).$$

b) Montrer que, pour ce même entier k : $e^x\sqrt{1-\varphi(x)^2}-\operatorname{Arccos}\varphi(x)=2k\pi$.

3) On note $\Delta:t\longmapsto e^t\sqrt{1-\varphi(t)^2}-\operatorname{Arccos}\varphi(t)$.

a) Étudier les variations de φ, puis montrer que Δ a pour ensemble de définition un intervalle de la forme $[\alpha,+\infty[$, avec $\alpha<0$.

b) Justifier que Δ est dérivable sur $]\alpha,+\infty[$, puis montrer que pour tout $t>\alpha$:

$$\Delta'(t)=\frac{e^{-t}\left(e^{2t}-2t+1\right)}{\sqrt{1-\varphi(t)^2}}.$$

c) Montrer que pour tout $k\in\mathbb{N}$, l'équation $\Delta(t)=2k\pi$ d'inconnue $t\in[\alpha,+\infty[$ possède une unique solution, que l'on note x_k.

d) On pose, pour tout $k\in\mathbb{N}$, $y_k=2k\pi+\operatorname{Arccos}\varphi(x_k)$ et $z_k=x_k+iy_k$. Montrer que $e^{z_k}=z_k$.

4) Déterminer tous les points fixes de l'exponentielle complexe.

5) On étudie enfin la position des points fixes z_k lorsque k tend vers $+\infty$.

a) Montrer que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et que $x_k\xrightarrow[k\to+\infty]{}+\infty$, puis que $y_k-2k\pi\xrightarrow[k\to+\infty]{}\frac{\pi}{2}$.

b) Montrer que $\frac{x_k}{y_k}\xrightarrow[k\to+\infty]{}0$, puis, en calculant le module de e^{z_k}, que $x_k-\ln(2k\pi)\xrightarrow[k\to+\infty]{}0$.

Problème 3 — On note $f:x\longmapsto\frac{(x-1)^2}{4}$, définie sur $\mathbb{R}_+$. On s'intéresse à une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0\geqslant 0$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ (on admet qu'elle est bien définie).

1) Dresser le tableau de variations de f. Étudier le signe de $f(x)-x$ sur $\mathbb{R}_+$, puis en déduire que f possède exactement deux points fixes $\alpha<\beta$, que l'on calculera et que l'on situera par rapport à 0 et 1.

2) Soit $a\geqslant 0$ tel que $f(f(a))=a$. On pose $b=f(a)$.
Calculer $(a-1)^2-(b-1)^2$ de deux façons et en déduire que $a\in\{\alpha,\beta\}$.

3) Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $u_0=\beta$, puis lorsque $u_0>\beta$.

4) On suppose que $u_0\in[0,1]$.

a) Montrer que l'intervalle $[0,1]$ est stable par f.

b) Montrer que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones, puis que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

5) On suppose que $u_0\in]1,\beta[$. Montrer qu'il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que $u_N\in[0,1]$, puis conclure.

Problème 4 — Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n : x \longmapsto e^x + nx^2 - 3$.

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$, que l'on note u_n, et que $u_n > 0$.

2) Étudier la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, puis montrer qu'elle converge.

3) Déterminer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4) Déterminer la limite de $\left(\sqrt{n}\,u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

5) Déterminer la limite de $\left(n\left(\sqrt{\dfrac{2}{n} - u_n}\right)\right)_{n\geqslant 1}$.

Problème 5 — On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{n+1}{\sqrt[3]{u_n}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et strictement positive.

2) Montrer que si $u_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\sim} \lambda n^\alpha$ pour certains réels $\lambda > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $\lambda = 1$ et $\alpha = \dfrac{3}{4}$.

3) On montre maintenant que l'on a bien un tel équivalent.

a) Montrer que $n^{3/4} \leqslant u_n \leqslant (n+1)^{3/4}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) En déduire que $u_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\sim} n^{3/4}$.

4) Montrer que $u_n - n^{3/4} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0$. On pourra poser $s = (n+1)^{1/4}$ et $t = n^{1/4}$, et factoriser $s^4 - t^4$ et $s^3 - t^3$.

5) ★ Soit $a > 0$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_0 = a$ et $v_{n+1} = \dfrac{n+1}{\sqrt[3]{v_n}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En se servant des résultats démontrés sur $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, montrer que $v_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\sim} n^{3/4}$.