NOMBRES COMPLEXES

Feuille d'exercices

I) CALCULS ALGÉBRIQUES, CONJUGUÉ, MODULE

Exercice 1 —

1) En étant le plus efficace possible dans les calculs, mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :
   a) $(2-\mathrm{i})(3+2\mathrm{i})$ b) $\dfrac{2+3\mathrm{i}}{\mathrm{i}}$ c) $\dfrac{1-2\mathrm{i}}{3+\mathrm{i}}$ d) $\dfrac{(3+5\mathrm{i})^2}{1-2\mathrm{i}}$ e) $(1+\mathrm{i})^4$
2) Soit $z\in\mathbb{C}$. Exprimer en fonction de $\mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(z)$ les parties réelle et imaginaire des nombres complexes suivants :
   a) $\mathrm{i}z$ b) $\dfrac{1}{z}$ c) z^2

Exercice 2 — Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z\in\mathbb{C}$:

1) $2z+\mathrm{i}=\overline{z}+1$. 2) $2z+\overline{z}=2+3\mathrm{i}$. 3) $2z+2\overline{z}=2+3\mathrm{i}$.

Exercice 3 — Résoudre géométriquement et par le calcul les équations suivantes d'inconnue $z\in\mathbb{C}$:

1) $\overline{z}=z$. 2) $|z-1|=|z|$. 3) $|z|=\mathrm{Re}(z)$. 4) $|z|=|z+1|=1$.

Exercice 4 —

1) On note f la fonction $z\longmapsto\dfrac{z-2\mathrm{i}}{z+1}$ sur $\mathbb{C}\setminus\{-1\}$. Déterminer et représenter l'ensemble des $z\in\mathbb{C}\setminus\{-1\}$ pour lesquels :
   a) $|f(z)|=1$. b) $f(z)\in\mathrm{i}\mathbb{R}$.
2) On note g la fonction $z\longmapsto\dfrac{3z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}$ sur $\mathbb{C}\setminus\{\mathrm{i}\}$. Déterminer et représenter l'ensemble des $z\in\mathbb{C}\setminus\{\mathrm{i}\}$ pour lesquels :
   a) $g(z)\in\mathbb{R}$. b) $|g(z)|=1$.

Exercice 5 — Montrer que si deux entiers naturels sont chacun la somme de deux carrés d'entiers, leur produit l'est aussi.

Exercice 6 — Soient $u,v\in\mathbb{C}$.

1) Simplifier $|u+v|^2+|u-v|^2$, puis interpréter géométriquement le résultat.
2) ★ Montrer que $|u|+|v|\leqslant|u+v|+|u-v|$ et étudier le cas d'égalité. Quelle interprétation géométrique ?

Exercice 7 —

1) Montrer, pour tout $z\in\mathbb{C}$: $(|z-(1+\mathrm{i})|\leqslant 1)\Longrightarrow\left(\sqrt{10}-1\leqslant|z-4|\leqslant\sqrt{10}+1\right)$.
2) Ces deux bornes sont-elles atteintes ? Si oui, pour quels z ?

Exercice 8 — Soient $a,b,c\in\mathbb{U}$.

1) Montrer que $|a+b+c|=|ab+bc+ca|$.
2) On suppose $ab\neq 1$. Montrer que $\dfrac{a-b}{1-ab}\in\mathbb{R}$.
3) Montrer que $\dfrac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}\in\mathbb{R}$.
4) On suppose $a+b+c=0$. Montrer que $|a-b|=|b-c|=|c-a|=\sqrt{3}$: le triangle de sommets a, b, c est équilatéral.

II) ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ

Exercice 9 —

1) Développer de tête $(z-a)(z-b)$ pour tous $z,a,b\in\mathbb{C}$.
2) Factoriser de tête, pour tout $z\in\mathbb{C}$:
   a) z^2+4. b) z^2-4z+3. c) z^2+z-6. d) $z^2-7z+12$.
   e) $9z^2-6z+1$. f) $z^2-(1+\mathrm{i})z+\mathrm{i}$. g) $z^2-(2+\mathrm{i})z+1+\mathrm{i}=0$.

Exercice 10 — Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1) $z^2-4z+13=0$. 2) $z^2-3z+3+\mathrm{i}=0$.
3) $z^2-(5+3\mathrm{i})z+2+9\mathrm{i}=0$. 4) $3z^2-2(2+\mathrm{i})z+2=0$.
5) $z^4+(3-6\mathrm{i})z^2-8-6\mathrm{i}=0$. 6) $z^2-2\mathrm{i}z\sin\theta-1=0$, où $\theta\in\mathbb{R}$.

Exercice 11 — Résoudre les systèmes suivants, d'inconnues $x,y\in\mathbb{C}$, où $a\in\mathbb{C}$ est un paramètre :

1) $\begin{cases}x+y=1+4\mathrm{i}\\ xy=-5+5\mathrm{i}\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x+y=2\\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=1\end{cases}$ 3) $\begin{cases}x+y=(1+\mathrm{i})a\\ xy=\mathrm{i}a^2\end{cases}$

Exercice 12 ★ — Résoudre l'équation d'inconnue $z\in\mathbb{C}$: (E) $\left(z^2+4z+1\right)^2+(3z+5)^2=0$.

III) FORME TRIGONOMÉTRIQUE

Exercice 13 —

1) Déterminer une forme trigonométrique des nombres suivants :
   a) $1-\sqrt{2}$. b) $-7\mathrm{i}$. c) $\dfrac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{3}-\mathrm{i}}$. d) $\left(1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^{25}$; forme algébrique ?
2) Déterminer un argument de $2-\mathrm{i}$ et de $-3+4\mathrm{i}$ à l'aide d'un Arctan, puis d'un Arccos, puis d'un Arcsin.

Exercice 14 — Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Déterminer une forme trigonométrique des nombres suivants :

1) $\sin\theta + \mathrm{i}\cos\theta$. 2) $1 - \sin\theta + \mathrm{i}\cos\theta$.

3) $\dfrac{1+\mathrm{i}\tan\theta}{1-\mathrm{i}\tan\theta}$ (si $\cos\theta \neq 0$). 4) $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{3\mathrm{i}\theta}$.

Exercice 15 — Déterminer tous les $n \in \mathbb{N}$ pour lesquels :

1) $(1+\mathrm{i})^n \in \mathbb{R}$. 2) $(\sqrt{3}+\mathrm{i})^n \in \mathrm{i}\mathbb{R}$.

Exercice 16 — Déterminer les racines carrées de $Z = \sqrt{3}+\mathrm{i}$ sous forme algébrique, puis sous forme trigonométrique. En déduire la valeur de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

IV) Exponentielle complexe

Exercice 17 — Montrer que $|\mathrm{e}^z| \leqslant \mathrm{e}^{|z|}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ et étudier le cas d'égalité.

Exercice 18 — Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

1) a) $\mathrm{e}^z = 1+\mathrm{i}$. b) $\mathrm{e}^z = -5-12\mathrm{i}$.

2) a) $\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z} = 1$. b) $\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z} = 2\mathrm{i}$. c) $\mathrm{e}^z + 2\mathrm{e}^{-z} = \mathrm{i}$.

Exercice 19 ★ — Déterminer l'image directe par la fonction $z \longmapsto \mathrm{e}^z$ du rectangle $[1,2] + \mathrm{i}\,[0,\pi]$ ainsi que l'image réciproque du disque de centre 0 et de rayon 1.

Exercice 20 ★★ —

1) Montrer qu'il existe $\alpha \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ tel que $\mathrm{e}^{\frac{\alpha}{\tan\alpha}} = \dfrac{\alpha}{\sin\alpha}$.

2) En déduire que la fonction $z \longmapsto \mathrm{e}^z$ possède un point fixe de la forme $x + \mathrm{i}\alpha$, avec $x \in \mathbb{R}$.

V) Calculs trigonométriques

Exercice 21 — Primitiver les expressions suivantes :

1) $x \longmapsto \cos^4 x$ 2) $x \longmapsto \sin^2(2x)\cos x$ 3) $x \longmapsto \cos(2x)\sin^3 x$

Exercice 22 — Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a, b \in \mathbb{R}$. Calculer :

1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(a+kb)$. 2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(a+kb)$.

Exercice 23 ★ —

1) Montrer que $|\sin x| \geqslant \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2) En déduire $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty} \sum_{k=1}^{n} |\sin k|$.

Exercice 24 — Exprimer $\cos(5x)$ en fonction de $\cos x$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 25 —

1) Résoudre l'équation $\sqrt{3}\cos x - \sin x = \sqrt{2}$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

2) Déterminer le maximum sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \longmapsto 3\cos x + 4\sin x$, et les points où il est atteint.

Exercice 26 ★ —

1) Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$: $\sin^2 x - \sin^2 y = \sin(x+y)\sin(x-y)$

2) a) Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\sin(x+y) = \sin x + \sin y - 4\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}\sin\frac{x+y}{2}$$

b) Résoudre l'équation $\sin(x+y) = \sin x + \sin y$ d'inconnue $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

VI) Racines n-ièmes

Exercice 27 —

1) Écrire sous la forme $a + b\mathrm{j}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ les nombres suivants :

a) $\bar{\mathrm{j}}$. b) j^{2026}. c) $(3+\mathrm{j})(1-2\mathrm{j})$.

d) $(1+\mathrm{j})^5$. e) $\dfrac{\mathrm{j}^7}{1+\mathrm{j}^2}$. f) $\dfrac{1}{2+\mathrm{j}}$.

2) Simplifier le produit $(u+v)(u+\mathrm{j}v)\left(u+\mathrm{j}^2 v\right)$ pour tous $u, v \in \mathbb{C}$.

3) Résoudre l'équation $\mathrm{Im}\left(\dfrac{1}{z^2+z+1}\right) = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C} \setminus \{\mathrm{j}, \bar{\mathrm{j}}\}$.

Exercice 28 — Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1) $z^3 = 1+\mathrm{i}\sqrt{3}$. 2) $z^6 = \dfrac{-4}{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}$. 3) $z^5 = \dfrac{\left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^4}{(1+\mathrm{i})^2}$.

Exercice 29 ★ — Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1) $z^6 + 7z^3 - 8 = 0$. 2) $z^8 + (1-\mathrm{i})z^4 - \mathrm{i} = 0$.

Exercice 30 — Soit $n \geqslant 2$ un entier. Résoudre l'équation $z^n = \bar{z}$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 31 ★ — Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1) $(z+\mathrm{i})^n = (z-\mathrm{i})^n$, où $n \in \mathbb{N}^*$. 2) $\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^3 + \left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^3 = 0$.

Indication :

1)

2) Pour calculer $\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$ en $\theta = \dfrac{\pi}{12}$ ou $\dfrac{5\pi}{12}$, on peut utiliser les formules d'addition.

Exercice 32 ★ — En considérant les racines cinquièmes de l'unité, calculer

$$\alpha = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

Exercice 33 ★ — Soient $n \geqslant 2$ et $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}}$.

1) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp}$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$.

2) ★★ Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{1-\omega^k}$.

Exercice 34 ★ — Soit $\omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{7}}$. Calculer les nombres :

$$A = \omega + \omega^2 + \omega^4 \quad \text{et} \quad B = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$$

Exercice 35 ★ — Simplifier pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

1) $\displaystyle\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} (1+\omega)^n$. 2) $\displaystyle\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} |\omega - 1|$.

Exercice 36 ★ — Est-il vrai que $\mathbb{U} = \displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{U}_n$?

VII) Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Exercice 37 — Déterminer une expression explicite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

1) $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = 6u_{n+1} - 5u_n$.
2) $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et $u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$.
3) $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.
4) $u_0 = 1$, $u_1 = -1$ et $u_{n+2} = \dfrac{u_{n+1} - u_n}{2}$.
5) $u_0 = u_1 = 3$ et $u_{n+2} = 3u_{n+1} - \dfrac{9u_n}{4}$.
6) $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et $u_{n+2} = \dfrac{u_{n+1}^6}{u_n^5}$.

VIII) Géométrie dans le plan complexe

Exercice 38 —

1) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations suivantes :
   a) $z \longmapsto z + 2 + \mathrm{i}$. b) $z \longmapsto \left(1 + \mathrm{i}\sqrt{3}\right)z + \sqrt{3}(1 - \mathrm{i})$.
2) Déterminer l'écriture complexe de la rotation de centre $1 + \mathrm{i}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$.

Exercice 39 — À quelle condition nécessaire et suffisante sur $z \in \mathbb{C}$:

1) les points d'affixes z, z^2 et z^3 sont-ils alignés ?
2) les points d'affixes 1, z et z^2 forment-ils un triangle non aplati rectangle en 1 ?
3) les points d'affixes 0, z et $\dfrac{1}{z}$ sont-ils alignés $(z \neq 0)$?

Exercice 40 ★ — Soient A, B, C trois points distincts du plan géométrique d'affixes respectives a, b, c.

1) Montrer que le triangle ABC est équilatéral si, et seulement si,

$$\frac{c-a}{b-a} = -\mathrm{j} \quad \text{ou} \quad \frac{c-a}{b-a} = -\mathrm{j}^2.$$

2) En déduire que le triangle ABC est équilatéral si, et seulement si,

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca.$$