CALCUL INTÉGRAL

Feuille d'exercices

I) PRIMITIVATION DIRECTE

Exercice 1 — Primitiver, sans vrai calcul, chacune des expressions suivantes :

1) 3^x 2) $\dfrac{1}{\sqrt{3x+1}}$ 3) $x\sqrt{x^2+1}$ 4) $\dfrac{x^2}{1+x^3}$ 5) $x\,\mathrm{e}^{-3x^2}$ 6) $\dfrac{\cos x}{\sin^3 x}$

7) $\tan^2 x$ 8) $\dfrac{\ln x}{x}$ 9) $\dfrac{1}{x\ln^4 x}$ 10) $\dfrac{1}{x\ln x}$ 11) $\dfrac{1}{\sqrt{1-4x^2}}$ 12) $\dfrac{1}{\mathrm{ch}\,x}$

13) $\dfrac{\sin(2x)}{1+\cos^2 x}$ 14) $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x^3}}$ 15) $\dfrac{1}{x+\sqrt{x}}$ 16) $\dfrac{1}{x+x\ln^2 x}$ 17) $\dfrac{1}{\mathrm{th}\,x}$

18) $\dfrac{1}{\cos^2 x\sqrt{\tan x}}$ 19) $\mathrm{e}^{x+\mathrm{e}^x}$ 20) $\dfrac{\ln(\ln x)}{x\ln x}$ 21) $\dfrac{1}{x\ln x\,\ln(\ln x)}$

22) $\dfrac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$ 23) ★ $\dfrac{\ln(\ln x)}{x}$ 24) ★ $\dfrac{1}{\sin x\cos x}$

Exercice 2 — Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de chacune des fonctions suivantes :

1) $x\longmapsto \cos^2 x\sin^4 x$ 2) $x\longmapsto \sin^3 x\cos(2x)$

Exercice 3 — Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de chacune des fonctions suivantes :

1) $x\longmapsto \dfrac{3x-2}{x^2+4}$ 2) $x\longmapsto \dfrac{1}{x^2+x+1}$ 3) $x\longmapsto \dfrac{2x+1}{3x^2-6x+4}$

Exercice 4 — Calculer grâce à l'exponentielle complexe :

1) l'intégrale $\displaystyle\int_0^\pi \mathrm{e}^{-t}\sin(2t)\,\mathrm{d}t$; 2) une primitive de $x\longmapsto \sin(2x)\,\mathrm{ch}\,x$.

II) INTÉGRATION PAR PARTIES

Exercice 5 — Calculer par intégration par parties :

1) l'intégrale $\displaystyle\int_0^\pi \mathrm{e}^{-t}\sin(2t)\,\mathrm{d}t$; 2) une primitive de $x\longmapsto \sin(2x)\,\mathrm{ch}\,x$.

Exercice 6 — Primitiver les expressions suivantes en intégrant par parties :

1) $\mathrm{Arctan}\,x$ 2) $\mathrm{Arcsin}\,x$ 3) $x^2\sin x$ 4) $x^\alpha\ln x$ $(\alpha\in\mathbb{R})$

5) $\dfrac{x}{\sin^2 x}$ 6) $x\sin^2 x$ 7) $(x\ln x)^2$ 8) $x\,\mathrm{Arctan}\,x$

9) ★ $x\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ 10) ★ $\mathrm{e}^{\mathrm{Arcsin}\,x}$

Exercice 7 —

1) Déterminer une primitive de $x\longmapsto \left(x^3-2x+1\right)\mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}$.
2) Soit P une fonction polynomiale réelle de degré n. Montrer que la fonction
$$x\longmapsto\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k P^{(k)}(x)\right)\mathrm{e}^x$$
est une primitive de $x\longmapsto P(x)\mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}$.
3) Adapter le résultat à $x\longmapsto P(x)\mathrm{e}^{-x}$, puis calculer $\displaystyle\int_0^1\left(x^2+x\right)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 8 — On pose $\displaystyle I_{p,q}=\int_0^1 x^p\,(1-x)^q\,\mathrm{d}x$ pour tous $p,q\in\mathbb{N}$.

1) Montrer que $I_{p,q}=\dfrac{q}{p+1}I_{p+1,q-1}$ pour tous $p\in\mathbb{N}$ et $q\in\mathbb{N}^*$.
2) En déduire une expression explicite de $I_{p,q}$ en fonction de p et q pour tous $p,q\in\mathbb{N}$.
3) ★ En déduire pour tous $p,q\in\mathbb{N}$ une expression simplifiée de $\displaystyle\sum_{k=0}^{q}\binom{q}{k}\frac{(-1)^k}{p+k+1}$.

Exercice 9 — Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $\displaystyle I_n=\int_0^1\frac{(1-x)^n}{n!}\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

1) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.
2) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $I_n=\dfrac{1}{(n+1)!}+I_{n+1}$.
3) En déduire $\mathrm{e}=\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$.

Exercice 10 ★ — Intégrales de Wallis

Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $\displaystyle I_n=\int_0^{\pi/2}\sin^n(t)\,\mathrm{d}t$.

1) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $I_{n+2}=\dfrac{n+1}{n+2}I_n$.
2) Soit $p\in\mathbb{N}$. Exprimer I_{2p+1} en fonction de $(2p+1)!$ et $p!$.
3) Soit $p\in\mathbb{N}$. Exprimer I_{2p} en fonction de $(2p)!$ et $p!$.
4) Montrer que la suite $((n+1)I_nI_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est constante, et donner sa valeur.
5) Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et strictement positive, puis que $I_{n+1}\underset{n\longrightarrow\infty}{\sim}I_n$.
6) ★ En déduire $I_n\underset{n\longrightarrow\infty}{\sim}\sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$, puis la formule de Wallis : $\dbinom{2n}{n}\underset{n\longrightarrow\infty}{\sim}\dfrac{4^n}{\sqrt{n\pi}}$.

III) Changement de variable

Exercice 11 — Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes grâce au changement de variable indiqué :

1) $x \longmapsto \dfrac{1}{x\sqrt{x-1}}$ $(t=\sqrt{x-1})$; 2) $x \longmapsto \dfrac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}$ $(s=\sqrt{e^x+1})$;

3) $x \longmapsto \dfrac{\sin^3 x}{\cos^4 x}$ $(u=\cos x)$; 4) $x \longmapsto \dfrac{1}{\operatorname{ch} x}$ $(t=e^x,\ t=\operatorname{sh} x,\ t=\operatorname{th} x)$;

5) $x \longmapsto \sin(\ln x)$ $(t=\ln x)$; 6) ★ $x \longmapsto \sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$ $(x=\sin^2\theta)$.

Exercice 12 — Primitiver les expressions suivantes :

1) $\sqrt{1-x^2}$ en posant $x=\sin t$. 2) $\sqrt{4-x^2}$ en adaptant.

3) $\sqrt{x-x^2}$ grâce à la forme canonique de $x-x^2$. 4) $\sqrt{2x-3x^2}$.

Exercice 13 — Calculer les intégrales suivantes grâce au changement de variable indiqué :

1) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,dx$ $(t=\sqrt{e^x-1})$; 2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2}$ $(x=\tan\theta)$;

3) $\displaystyle\int_{-1}^1 t^2\sqrt{1-t^2}\,dt$ $(t=\sin\theta)$; 4) ★ $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t^2+t+1}}$ $(x=\sqrt{t^2+t+1}-t)$.

Exercice 14 ★ — Soit $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$ sur $]0,1[$.

1) Déterminer une primitive de f en posant $t=\sqrt{x}$.
2) Déterminer une primitive de f en mettant $x-x^2$ sous forme canonique, puis en posant $t=2x-1$.
3) Les deux résultats sont-ils contradictoires ? Montrer directement que leur différence est constante sur $]0,1[$ et calculer cette constante.

Indication : Q3 : dériver la différence, ou poser $\sqrt{x}=\sin\theta$ avec $\theta \in \left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

Exercice 15 — On pose :

$$C=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\cos t+\sin t}\,dt \quad \text{et} \quad S=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\cos t+\sin t}\,dt$$

1) Montrer que $C=S$ par changement de variable, puis en déduire S et C.
2) En déduire $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t+\sqrt{1-t^2}}$.

Exercice 16 ★ — On pose $I=\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2+\cos x}$.

1) Un étudiant pose $t=\tan\dfrac{x}{2}$: les bornes deviennent $\tan 0=\tan\pi=0$, et il conclut que $I=0$. Pourquoi ce résultat est-il forcément faux ? Quelle hypothèse du théorème de changement de variable n'est pas vérifiée ?
2) Pour $a\in[0,\pi[$, calculer $J(a)=\displaystyle\int_0^a \frac{dx}{2+\cos x}$ grâce au changement de variable $t=\tan\dfrac{x}{2}$ (on rappelle que $\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$).
3) En déduire $\displaystyle\int_0^\pi \frac{dx}{2+\cos x}$, puis I.

Exercice 17 ★ —

1) Soient $a>0$ et $f : [-a,a] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et paire. Montrer que

$$\int_{-a}^a \frac{f(x)}{1+e^x}\,dx=\int_0^a f(x)\,dx.$$

2) En déduire $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{(1+e^x)(1+x^2)}$ et $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+e^x}\,dx$.

3) Calculer $\displaystyle\int_{1/2}^2 \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt$ grâce au changement de variable $u=\dfrac{1}{t}$.

4) ★ Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan x)\,dx$ grâce au changement de variable $u=\dfrac{\pi}{4}-x$.

Indication : Q1 : poser $x=-t$ dans l'intégrale de gauche. Q4 : vérifier que $1+\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-u\right)=\dfrac{2}{1+\tan u}$.

Exercice 18 ★ — Soit $f\in\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$.

1) Montrer, en posant $u=\pi-x$, que : $\displaystyle\int_0^\pi x f(\sin x)\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\,dx$.
2) Pour tout $r\in[0,\pi[$, calculer $\displaystyle\int_0^r \frac{dx}{1+\sin x}$ en posant $t=\tan\dfrac{x}{2}$, puis en déduire $\displaystyle\int_0^\pi \frac{x\,dx}{1+\sin x}$.

IV) Théorème fondamental de l'analyse

Exercice 19 — Soit $f \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$. Calculer $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, puis interpréter géométriquement.

Exercice 20 ★ — Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Montrer que les fonctions suivantes sont dérivables et calculer leurs dérivées :

1) $x \longmapsto \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}}$. 2) ★ $x \longmapsto \displaystyle\int_\pi^{2\pi} \frac{\cos(tx)}{t}\,\mathrm{d}t$.

3) $x \longmapsto \displaystyle\int_0^x f(t+x^2)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 21 ★ — Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Montrer que la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\varphi(x) = \int_0^{2\pi} f(x-t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = \mathrm{i}\varphi(x) + f(x) - f(x-2\pi)$.

V) Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$

Exercice 22 — Effectuer la division euclidienne de $A = 3X^4 - 2X^3 + X^2 + 5X - 4$ par $B = X^2 - X + 2$. En déduire l'écriture de $\dfrac{A}{B}$ comme somme d'un polynôme et d'une fraction rationnelle dont le numérateur est de degré < 2.

Exercice 23 — Vérifier que $X^2 - X + 1$ divise $X^5 - 2X^4 + 6X^3 - 4X^2 + 3X + 1$.

Exercice 24 — On pose $P = X^5 + 4X^4 + 6X^3 + 5X^2 - 4X - 12$.

1) Vérifier que -2 et 1 en sont racines, puis déterminer leurs multiplicités respectives.
2) En déduire la factorisation irréductible de P sur $\mathbb{R}$.
3) Donner la forme, sans calculer les coefficients, de la décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{P}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 25 — Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ les fractions rationnelles suivantes :

1) $\dfrac{2X+1}{(X-1)(X+2)}$ 2) $\dfrac{X+3}{(X-1)^2(X+1)}$ 3) $\dfrac{X^4+1}{X^2(X+1)}$

4) $\dfrac{5X}{(X-2)(X^2+1)}$ 5) $\dfrac{X^3+1}{(X^2+1)^2}$ 6) $\dfrac{1}{X^4-1}$

Exercice 26 — Décomposer en éléments simples, puis déterminer une primitive sur un intervalle où elle est continue :

1) $x \longmapsto \dfrac{x+5}{x^2+x-2}$ 2) $x \longmapsto \dfrac{x^3}{x^2-1}$ 3) $x \longmapsto \dfrac{1}{x(x+1)^2}$

4) $x \longmapsto \dfrac{x^2+1}{x(x^2+x+1)}$ 5) $x \longmapsto \dfrac{1}{x^3+1}$

Exercice 27 — Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes, sur un intervalle où elle est continue, en se ramenant à une fraction rationnelle :

1) $x \longmapsto \dfrac{1}{\operatorname{sh} x}$ $(t = \mathrm{e}^x)$; 2) $x \longmapsto \dfrac{1}{\cos x}$ $(t = \sin x)$;

3) $x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^x}$; 4) $x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x} - 3\mathrm{e}^x + 2}$;

5) $x \longmapsto \dfrac{\sin x}{\cos x + \cos^2 x}$; 6) ★ $x \longmapsto \dfrac{1}{1+\tan x}$ $(t = \tan x)$.

VI) Choisir la méthode

Exercice 28 — Calculer les intégrales suivantes, en choisissant la méthode :

1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^3}\,\mathrm{d}x$ 2) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln^2 x\,\mathrm{d}x$ 3) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x^2(x+1)}$ 4) $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \tan^3 x\,\mathrm{d}x$

5) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos^3 x\,\mathrm{d}x$ 6) $\displaystyle\int_0^3 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x+1}}$ 7) $\displaystyle\int_0^1 \ln\left(1+x^2\right)\mathrm{d}x$

8) $\displaystyle\int_0^{\pi} x\cos^2 x\,\mathrm{d}x$ 9) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}$ 10) ★ $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^4 x}$

VII) Inégalités intégrales

Exercice 29 — Pas d'étude de fonction dans cet exercice ! Montrer, en exploitant la croissance de l'intégrale, que :

1) pour tout $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$: $\tan x \geqslant x$.
2) pour tout $x \geqslant 0$:
   a) $\sin x \leqslant x$. b) $\cos x \geqslant 1 - \dfrac{x^2}{2}$. c) $\cos x \leqslant 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24}$.
3) pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \geqslant 0$: $\mathrm{e}^x \geqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.

Exercice 30 ★ — Soient $f, g \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ monotones, de même sens de variation. Montrer que pour tous $x, y \in [a,b]$: $(f(y)-f(x))(g(y)-g(x)) \geqslant 0$, puis que

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant (b-a)\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

VIII) Approximation de sommes par des intégrales

Exercice 31 ★ — Montrer que :

1) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k} \underset{n\longrightarrow\infty}{\sim} \ln\ln n$ 2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\longrightarrow\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ $(\alpha \in]0,1[)$

3) $\ln(n!) \underset{n\longrightarrow+\infty}{=} n\ln n - n + \mathrm{o}(n)$

Indication : Encadrer $f(k)$ par des intégrales de f sur $[k-1,k]$ et sur $[k,k+1]$, grâce à la monotonie de f, puis sommer.

Exercice 32 ★ — Soit $f \in \mathscr{C}^0([1,+\infty[,\mathbb{R})$ positive et décroissante. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.