CALCUL INTÉGRAL

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et I, J désignent des intervalles de $\mathbb{R}$ non vides et non réduits à un point.

I) PRIMITIVES

Définition 1 (Primitive)

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$. On dit que $F : I \longrightarrow \mathbb{K}$ est UNE **primitive** de f sur I si F est dérivable sur I et $F' = f$.
Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, F est une primitive de f si et seulement si $\mathrm{Re}(F)$ est une primitive de $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(F)$ une primitive de $\mathrm{Im}(f)$ (car $F' = \mathrm{Re}(F)' + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(F)'$). Ainsi, primitiver f revient à primitiver ses parties réelle et imaginaire.

Exemple 2 La fonction $x \longmapsto \dfrac{x^3}{3}$ est une primitive de $x \longmapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$, et Arctan est une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$.

Proposition 3 (Unicité à constante près)

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ et F une primitive de f sur I.
Les primitives de f sur I sont exactement les fonctions $F + \lambda$, λ décrivant $\mathbb{K}$.
En particulier, pour tous $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$, il existe une unique primitive de f sur I valant y_0 en x_0.

Démonstration

Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $(F+\lambda)' = F' = f$. Réciproquement, si G est une primitive de f, alors $(G-F)' = 0$ et, comme I est un intervalle, $G - F$ est constante : il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $G = F + \lambda$.
La primitive valant y_0 en x_0 est alors $F + \lambda$ avec l'unique choix $\lambda = y_0 - F(x_0)$. ■

L'hypothèse « I est un intervalle » est indispensable. Sur $\mathbb{R}^*$, qui n'est pas un intervalle, la fonction égale à $\ln|x|$ sur $\mathbb{R}_-^*$ et à $\ln|x| + 1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ qui ne diffère pas de $x \longmapsto \ln|x|$ d'une constante.

Dériver est mécanique. On connaît les dérivées des fonctions usuelles, et les règles de dérivation (somme, produit, quotient, composée) donnent la dérivée de toute fonction construite à partir d'elles.

Primitiver ne l'est pas. Connaître des primitives de f et de g donne une primitive de $\lambda f + \mu g$, mais ne donne pas, en général, de primitive de fg, de $\dfrac{f}{g}$ ni de $g \circ f$. Par exemple, on sait primitiver $x \longmapsto 1 + x^2$, mais il a fallu introduire Arctan pour primitiver son inverse, et on peut montrer que les primitives de $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ ne s'expriment pas à l'aide des fonctions usuelles.

A - RECONNAÎTRE UNE DÉRIVÉE

Il faut d'abord savoir reconnaître la dérivée d'une fonction usuelle, c'est-à-dire lire à l'envers les formules de dérivation : comme $\sin' = \cos$, une primitive de cos est sin. Voici un tableau récapitulatif.

Fonction	Primitive
$x^\alpha \quad (\alpha \neq -1)$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
e^x	e^x
$\ln x$	$x\ln x - x$

Fonction	Primitive
$\mathrm{ch}\,x$	$\mathrm{sh}\,x$
$\mathrm{sh}\,x$	$\mathrm{ch}\,x$
$\mathrm{th}\,x$	$\ln(\mathrm{ch}\,x)$
$1 - \mathrm{th}^2 x$	$\mathrm{th}\,x$

Fonction	Primitive
$\cos x$	$\sin x$
$\sin x$	$-\cos x$
$1 + \tan^2 x$	$\tan x$
$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert$

Fonction	Primitive
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{Arctan}\,x$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\mathrm{Arcsin}\,x$
$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\mathrm{Arccos}\,x$

Chaque formule vaut sur tout intervalle où la fonction est définie : par exemple $\mathbb{R}_+^*$ pour x^α avec α non entier, $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ pour $\dfrac{1}{x}$, et un intervalle où cos ne s'annule pas pour tan.

On peut aussi lire à l'envers la dérivée d'une composée, $(G \circ u)' = u' \times (G' \circ u)$. Moralement, ce sont les mêmes formules que ci-dessus, avec u à la place de x et un facteur u' en plus : comme $\sin' = \cos$, on a $(\sin u)' = u' \cos u$, donc une primitive de $u' \cos u$ est $\sin u$. Le tableau ci-dessous donne les formes à savoir reconnaître, pour u dérivable. L'idée est de repérer dans la fonction à primitiver une dérivée u' multipliée par une fonction de u :

Fonction	$u'u^\alpha \quad (\alpha \neq -1)$	$\dfrac{u'}{u}$	$u'\mathrm{e}^u$	$u'\cos u$	$\dfrac{u'}{1+u^2}$	$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$
Primitive	$\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\ln\lvert u\rvert$	e^u	$\sin u$	$\operatorname{Arctan} u$	$2\sqrt{u}$

Exemple 4

- Une primitive de $x \longmapsto \dfrac{x^3}{x^4+1}$ sur $\mathbb{R}$ est $x \longmapsto \dfrac{\ln(x^4+1)}{4}$ (forme $\dfrac{u'}{u}$ à la constante $\dfrac{1}{4}$ près).
- Une primitive de $x \longmapsto x\mathrm{e}^{x^2}$ sur $\mathbb{R}$ est $x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{x^2}}{2}$ (forme $u'\mathrm{e}^u$).
- Une primitive de $x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est $x \longmapsto 2\mathrm{e}^{\sqrt{x}}$ (forme $u'\mathrm{e}^u$ avec $u=\sqrt{\cdot}$, $u'=\dfrac{1}{2\sqrt{\cdot}}$).
- Une primitive de $x \longmapsto \dfrac{2x}{1+x^4}$ sur $\mathbb{R}$ est $x \longmapsto \operatorname{Arctan}(x^2)$ (forme $\dfrac{u'}{1+u^2}$).
- Une primitive de $x \longmapsto \cos x \sin^3 x$ sur $\mathbb{R}$ est $x \longmapsto \dfrac{\sin^4 x}{4}$ (forme $u'u^\alpha$).

On a souvent des fonctions de la forme $x \longmapsto f(ax+b)$, avec $a \neq 0$. Si F est une primitive de f :

Une primitive de $x \longmapsto f(ax+b)$ est $x \longmapsto \dfrac{F(ax+b)}{a}$.

Exemple 5 Une primitive de $x \longmapsto \sin(5x+2)$ est $x \longmapsto -\dfrac{\cos(5x+2)}{5}$.

De même, pour $a>0$, on factorise : $\dfrac{1}{x^2+a^2} = \dfrac{1}{a^2} \times \dfrac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}$, d'où :

Une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2+a^2}$ est $x \longmapsto \dfrac{1}{a}\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{x}{a}\right)$.

Plus généralement, soit $P(x)=ax^2+bx+c$, avec $a\neq 0$, un polynôme de degré 2 de discriminant strictement négatif. Sa forme canonique est $P(x)=a\left((x-p)^2+q^2\right)$ avec $p=-\dfrac{b}{2a}$ et $q>0$, donc $\dfrac{1}{P(x)} = \dfrac{1}{a} \times \dfrac{1}{(x-p)^2+q^2}$, qu'on primitive en combinant les deux règles précédentes :

Une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{(x-p)^2+q^2}$ est $x \longmapsto \dfrac{1}{q}\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{x-p}{q}\right)$.

Exemple 6 Comme $x^2+2x+5=(x+1)^2+2^2$, une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2+2x+5}$ est $x \longmapsto \dfrac{1}{2}\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{x+1}{2}\right)$.

Reconnaître une dérivée de **produit**, $(uv)'=u'v+uv'$, ou de **quotient**, $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$, est plus rare et plus difficile que pour une composée : la formule comporte deux termes et on ne voit pas directement u et v. Si l'on ne reconnaît rien, on ne reste pas bloqué : on procède comme pour une dérivée « à trous ». On devine la **forme** de la primitive d'après ce que fait la dérivation, puis on détermine les coefficients en dérivant et en identifiant.

Produit. Pour P polynomial, $\left(P(x)\mathrm{e}^{x^2}\right)' = \left(P'(x)+2xP(x)\right)\mathrm{e}^{x^2}$: on obtient encore un polynôme fois e^{x^2}, mais le facteur $2x$ (dérivée de x^2) fait monter le degré d'une unité. Par exemple,

$$\left(x\mathrm{e}^{x^2}\right)' = (1+2x^2)\mathrm{e}^{x^2} \qquad \text{et} \qquad \left(x^2\mathrm{e}^{x^2}\right)' = (2x+2x^3)\mathrm{e}^{x^2}.$$

Pour primitiver $x \longmapsto (1+2x^2)\mathrm{e}^{x^2}$, dont le polynôme est de degré 2, on cherche donc une primitive de la forme $P(x)\mathrm{e}^{x^2}$ avec P de degré 1.

Quotient. La dérivée d'un quotient a un dénominateur élevé au carré : par exemple $\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)' = \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}$. Si l'on voit un carré v^2 au dénominateur, on cherche donc une primitive de dénominateur v.

Exemple 7

- Une primitive de $x \longmapsto (1+2x^2)\mathrm{e}^{x^2}$ sur $\mathbb{R}$: on cherche $x \longmapsto (ax+b)\mathrm{e}^{x^2}$, de dérivée $(2ax^2+2bx+a)\mathrm{e}^{x^2}$. Par identification, $a=1$ et $b=0$, d'où la primitive $x \longmapsto x\mathrm{e}^{x^2}$.
- Une primitive de $x \longmapsto \dfrac{x\mathrm{e}^x}{(1+x)^2}$ sur $]-1,+\infty[$: on cherche $x \longmapsto \dfrac{a\mathrm{e}^x}{1+x}$, de dérivée $\dfrac{a\mathrm{e}^x(1+x)-a\mathrm{e}^x}{(1+x)^2} = \dfrac{a\,x\mathrm{e}^x}{(1+x)^2}$. Ainsi $a=1$ et la primitive est $x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+x}$.
- Une primitive de $x \longmapsto \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$: on cherche $x \longmapsto \dfrac{a\cos x + b\sin x}{x}$, de dérivée $\dfrac{b\,x\cos x - a\,x\sin x - a\cos x - b\sin x}{x^2}$. Par identification, $a=0$ et $b=1$, d'où la primitive $x \longmapsto \dfrac{\sin x}{x}$.

B - Techniques de primitivation de fonctions trigonométriques

Pour primitiver $x \longmapsto \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)$ ou $x \longmapsto \mathrm{e}^{ax}\sin(bx)$, avec $a, b \in \mathbb{R}$ non tous deux nuls, on passe par l'exponentielle complexe :

> Une primitive de $x \longmapsto \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)$ est $x \longmapsto \mathrm{Re}\left(\dfrac{\mathrm{e}^{(a+\mathrm{i}b)x}}{a+\mathrm{i}b}\right)$; de même pour sin, avec Im.

Exemple 8 Une primitive de $x \longmapsto \mathrm{e}^x \sin x$ sur $\mathbb{R}$ est $x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{2}(\sin x - \cos x)$.

Démonstration

Comme $\mathrm{e}^x \sin x = \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}\right)$, une primitive est

$$x \longmapsto \mathrm{Im}\left(\frac{\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}}{1+\mathrm{i}}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{(1-\mathrm{i})\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{2}\right) = \frac{\mathrm{e}^x}{2}\mathrm{Im}\left((1-\mathrm{i})(\cos x + \mathrm{i}\sin x)\right) = \frac{\mathrm{e}^x}{2}(\sin x - \cos x).$$

On le vérifie en dérivant : $\dfrac{\mathrm{e}^x}{2}(\sin x - \cos x) + \dfrac{\mathrm{e}^x}{2}(\cos x + \sin x) = \mathrm{e}^x \sin x$. ■

Pour primitiver un produit de puissances de cos et de sin, on le **linéarise** (cf. chapitre « Nombres complexes »), c'est-à-dire qu'on l'écrit comme combinaison linéaire de $\cos(kx)$ et de $\sin(kx)$, puis on primitive terme à terme.

Exemple 9 Une primitive de $\cos^2$ sur $\mathbb{R}$ est $x \longmapsto \dfrac{x}{2} + \dfrac{\sin(2x)}{4}$, et une primitive de $\sin^3$ est $x \longmapsto -\dfrac{3\cos x}{4} + \dfrac{\cos(3x)}{12}$.

Démonstration

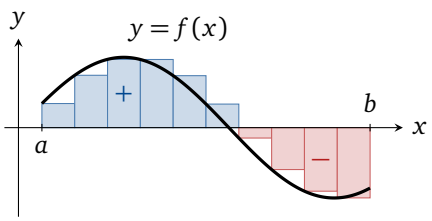
Par linéarisation, $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$ et

$$\sin^3 x = \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}\right)^3 = \frac{\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x} - 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + 3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x}}{-8\mathrm{i}} = \frac{3\sin x - \sin(3x)}{4},$$

puis on primitive terme à terme. ■

II) Intégrale d'une fonction continue

Pour une fonction continue $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'**aire algébrique** comprise entre la courbe de f et l'axe des abscisses : les parties situées sous l'axe comptent négativement.



Pour l'approcher, on découpe $[a,b]$ en n morceaux de même largeur $(b-a)/n$; sur le k-ième morceau (pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$), on remplace f par sa valeur $f\left(a+k(b-a)/n\right)$ à gauche. On obtient n rectangles, dont la somme des aires algébriques approche l'intégrale, d'autant mieux que n est grand.

Dans le chapitre « Intégration sur un segment », on démontrera que cette somme d'aires de rectangles, appelée **somme de Riemann**, converge vers l'intégrale :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

En attendant, on admet cette convergence, donc l'existence de l'intégrale d'une fonction continue, ainsi que les résultats qui suivent, et on pose $\displaystyle\int_a^a f = 0$, $\displaystyle\int_b^a f = -\int_a^b f$.

A - Propriétés de l'intégrale

Proposition 10 (Propriétés algébriques de l'intégrale)

Soient $f, g \in \mathscr{C}(I, \mathbb{C})$, $a, b, c \in I$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

(i) **Intégrale d'une constante :** $\displaystyle\int_a^b \lambda \,\mathrm{d}t = \lambda(b-a)$.

(ii) **Parties réelle et imaginaire :** $\displaystyle \mathrm{Re}\left(\int_a^b f\right) = \int_a^b \mathrm{Re}(f)$ et $\displaystyle \mathrm{Im}\left(\int_a^b f\right) = \int_a^b \mathrm{Im}(f)$.

(iii) **Conjugaison :** $\displaystyle\overline{\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t} = \int_a^b \overline{f(t)}\,\mathrm{d}t$.

(iv) **Linéarité :** $\displaystyle\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

(v) **Relation de Chasles :** $\displaystyle\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t$.

(vi) **Inégalité triangulaire :** Si $a \leqslant b$, $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$.

La proposition suivante fait intervenir des inégalités : les fonctions y sont donc à valeurs **réelles**. Attention aussi à l'ordre des bornes.

Proposition 11 (Positivité et croissance de l'intégrale)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \leqslant b$ et $f, g \in \mathscr{C}([a,b], \mathbb{R})$.

(i) **Positivité :** Si $f \geqslant 0$ sur $[a,b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.

(ii) **Stricte positivité :** Si $f \geqslant 0$ sur $[a,b]$, $a < b$ et f n'est pas identiquement nulle, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t > 0$.

Par contraposée, si $a < b$ et si f est de signe constant sur $[a,b]$ et d'intégrale nulle, alors f est nulle sur $[a,b]$.

(iii) **Croissance :** Si $f \leqslant g$ sur $[a,b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

B - Théorème fondamental de l'analyse

Théorème 12 (Théorème fondamental de l'analyse)

Soient $f \in \mathscr{C}(I, \mathbb{C})$ et $a, b \in I$.

(i) **Existence de primitives :** La fonction $\displaystyle x \longmapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est une primitive de f sur I. Plus précisément, pour tout $A \in \mathbb{C}$, la fonction $\displaystyle x \longmapsto A + \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f sur I qui vaut A en a.

En particulier, toute fonction continue sur un intervalle possède des primitives.

(ii) **Calcul d'intégrales :** Pour toute primitive F de f sur I,

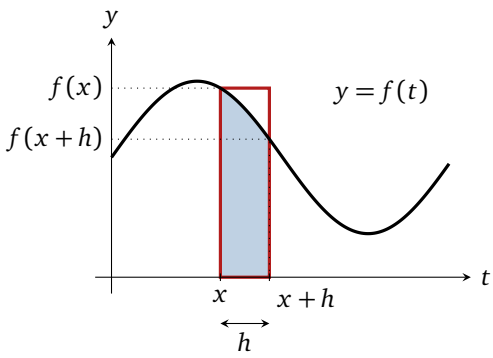
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a), \qquad \text{quantité notée } [F]_a^b \text{ ou } \left[F(t)\right]_{t=a}^{t=b}.$$

Démonstration

On admet le point (i). Pour le point (ii), si F est une primitive de f, $x \longmapsto F(x) - F(a)$ est une primitive de f nulle en a, donc, par unicité, $\displaystyle F(x) - F(a) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout $x \in I$; on évalue en $x = b$. ■

Essayons de comprendre intuitivement le rapport entre primitive et intégrale. Posons $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Calculons de deux façons l'aire sous la courbe de f entre x et $x+h$, où $h>0$ est petit :

- d'une part, par la relation de Chasles, elle vaut
$$\int_a^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = F(x+h)-F(x);$$
- d'autre part, comme h est petit, $f(t)\approx f(x)$ pour tout $t\in[x,x+h]$: cette aire est presque celle du rectangle, de largeur h et de hauteur $f(x)$, donc elle vaut environ $h\,f(x)$.



On en déduit $F(x+h)-F(x)\approx h\,f(x)$, soit $\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}\approx f(x)$ pour h proche de 0. Cela dit exactement que F est dérivable en x de dérivée $f(x)$: F est une primitive de f.

Exemple 13

- Pour tout $\alpha\geqslant 0$, $\displaystyle\int_0^1 t^\alpha\,\mathrm{d}t=\left[\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_{t=0}^{t=1}=\frac{1}{\alpha+1}$. • $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\big[\mathrm{Arctan}\big]_0^1=\frac{\pi}{4}$ et $\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos t\,\mathrm{d}t=[\sin]_0^{2\pi}=0$.
- $\displaystyle\int_0^{2\pi}|\sin t|\,\mathrm{d}t=\int_0^{\pi}\sin t\,\mathrm{d}t-\int_\pi^{2\pi}\sin t\,\mathrm{d}t=[-\cos]_0^{\pi}-[-\cos]_\pi^{2\pi}=2+2=4.$

Bien que ce chapitre soit surtout consacré au calcul exact d'intégrales, la croissance de l'intégrale et l'inégalité triangulaire permettent aussi d'obtenir des inégalités.

Exemple 14 Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x\geqslant 1+x$.

Démonstration

- Si $x\geqslant 0$, comme $\mathrm{e}^t\geqslant 1$ pour tout $t\in[0,x]$, $\mathrm{e}^x-1=\displaystyle\int_0^x\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t\geqslant\int_0^x 1\,\mathrm{d}t=x$. (bornes dans le bon ordre)
- Si $x<0$, comme $\mathrm{e}^t\leqslant 1$ pour tout $t\in[x,0]$, $1-\mathrm{e}^x=\displaystyle\int_x^0\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t\leqslant\int_x^0 1\,\mathrm{d}t=-x$. ■

Exemple 15 Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $|\sin x|\leqslant|x|$.

Démonstration

Pour $x\geqslant 0$, par l'inégalité triangulaire, $|\sin x|=\left|\displaystyle\int_0^x\cos t\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_0^x|\cos t|\,\mathrm{d}t\leqslant\int_0^x 1\,\mathrm{d}t=x=|x|$.

Pour $x<0$, par imparité du sinus, $|\sin x|=|\sin(-x)|\leqslant -x=|x|$. ■

C - Intégration par parties

Rappelons qu'une fonction $f:I\longrightarrow\mathbb{C}$ est de **classe** $\mathscr{C}^1$ sur I si elle est dérivable sur I et si f' est continue sur I. Par exemple, d'après le théorème fondamental de l'analyse, toute primitive d'une fonction continue est de classe $\mathscr{C}^1$.

Théorème 16 (Intégration par parties)

Soient $u,v\in\mathscr{C}^1(I,\mathbb{C})$ et $a,b\in I$. Alors
$$\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t=\big[u(t)v(t)\big]_{t=a}^{t=b}-\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration

La fonction uv est dérivable de dérivée $(uv)'=u'v+uv'$, continue car u,v,u',v' le sont. Par le théorème fondamental de l'analyse et par linéarité de l'intégrale,
$$[uv]_a^b=\int_a^b(uv)'=\int_a^b u'v+\int_a^b uv'.$$ ■

On choisit pour v le facteur qui se simplifie en le dérivant (polynôme, ln, Arctan) et pour u' celui que l'on sait primitiver (exponentielle, sinus, cosinus, ou 1 s'il n'y a qu'un seul facteur).

Exemple 17 $\displaystyle\int_0^1 t^2\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = e-2$ et $\displaystyle\int_0^1 t^3\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$.

Démonstration

$$\int_0^1 \underbrace{t^2}_{v(t)}\underbrace{\mathrm{e}^t}_{u'(t)}\,\mathrm{d}t \underset{\text{IPP}}{=} \left[t^2\mathrm{e}^t\right]_0^1 - 2\int_0^1 \underbrace{t}_{v(t)}\underbrace{\mathrm{e}^t}_{u'(t)}\,\mathrm{d}t \underset{\text{IPP}}{=} e-2\left(\left[t\mathrm{e}^t\right]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t\right) = e-2(e-(e-1)) = e-2.$$

$$\int_0^1 \underbrace{t\mathrm{e}^{t^2}}_{u'(t)}\times\underbrace{t^2}_{v(t)}\,\mathrm{d}t \underset{\text{IPP}}{=} \left[\frac{\mathrm{e}^{t^2}}{2}\times t^2\right]_{t=0}^{t=1} - \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{t^2}}{2}\times 2t\,\mathrm{d}t = \frac{e}{2} - \left[\frac{\mathrm{e}^{t^2}}{2}\right]_{t=0}^{t=1} = \frac{e}{2} - \frac{e-1}{2} = \frac{1}{2}.$$ ■

Exemple 18 $\displaystyle\int_0^\pi \mathrm{e}^t\cos t\,\mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{e}^\pi+1}{2}$.

Démonstration

Notons I cette intégrale. On intègre deux fois par parties, en primitivant à chaque fois l'exponentielle, et on retombe sur I :

$$I = \int_0^\pi \underbrace{\mathrm{e}^t}_{u'(t)}\underbrace{\cos t}_{v(t)}\,\mathrm{d}t \underset{\text{IPP}}{=} \left[\mathrm{e}^t\cos t\right]_0^\pi + \int_0^\pi \underbrace{\mathrm{e}^t}_{u'(t)}\underbrace{\sin t}_{v(t)}\,\mathrm{d}t \underset{\text{IPP}}{=} -\mathrm{e}^\pi - 1 + \underbrace{\left[\mathrm{e}^t\sin t\right]_0^\pi}_{=0} - I,$$

donc $2I = -\mathrm{e}^\pi - 1$. ■

On peut aussi intégrer par parties dans une intégrale à borne variable pour obtenir une primitive. On écrit alors $\displaystyle\int^x f(t)\,\mathrm{d}t$, sans borne inférieure : cette notation désigne **une** primitive de f, définie à une constante additive près, et le signe « = » n'est qu'une égalité à cette constante près.

Exemple 19 Sur $\mathbb{R}_+^*$, $\displaystyle\int^x \ln t\,\mathrm{d}t = x\ln x - x$, et sur $\mathbb{R}$, $\displaystyle\int^x \mathrm{Arctan}\,t\,\mathrm{d}t = x\,\mathrm{Arctan}\,x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)$.

Démonstration

$$\int^x \underbrace{1}_{u'(t)}\times\underbrace{\ln t}_{v(t)}\,\mathrm{d}t \underset{\text{IPP}}{=} x\ln x - \int^x t\times\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = x\ln x - x,$$

$$\int^x \underbrace{1}_{u'(t)}\times\underbrace{\mathrm{Arctan}\,t}_{v(t)}\,\mathrm{d}t \underset{\text{IPP}}{=} x\,\mathrm{Arctan}\,x - \int^x \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = x\,\mathrm{Arctan}\,x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right).$$ ■

D - Changement de variable

Théorème 20 (Changement de variable)

Soient $\varphi\in\mathscr{C}^1(I,\mathbb{R})$ à valeurs dans J, $f\in\mathscr{C}(J,\mathbb{C})$ et $a,b\in I$. Alors

$$\int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Démonstration

Soit F une primitive de f sur J. Comme f est continue, F est **de classe** $\mathscr{C}^1$ sur J, et φ est **de classe** $\mathscr{C}^1$ sur I : la fonction $F\circ\varphi$ est donc **de classe** $\mathscr{C}^1$ sur I, de dérivée $\varphi'\times(f\circ\varphi)$. Par le théorème fondamental de l'analyse,

$$\int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \left[F\circ\varphi\right]_a^b = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x.$$ ■

Dans la pratique, pour calculer une intégrale $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$ avec le changement de variable $x=\varphi(t)$, on ne cite pas le théorème : on suit la recette ci-dessous. Les manipulations de $\mathrm{d}x$ et de $\mathrm{d}t$ ne sont pas rigoureuses en elles-mêmes, c'est le théorème qui les justifie, mais c'est bien ainsi que l'on rédige un changement de variable.

(i) On part de $x=\varphi(t)$ et on dérive par rapport à t : $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\varphi'(t)$, donc $\mathrm{d}x=\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$;

(ii) On multiplie par $f(x)=f(\varphi(t))$: $f(x)\,\mathrm{d}x=f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$;

(iii) On change les bornes : quand t va de a à b, $x=\varphi(t)$ va de $\varphi(a)$ à $\varphi(b)$.

Une intégrale ne doit JAMAIS mélanger les deux variables x et t.

Exemple 21 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+1}=1+\ln 2-\ln(1+e)$.

Démonstration

On pose $u=\mathrm{e}^x$. Alors $\mathrm{d}u=\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=u\,\mathrm{d}x$, donc $\mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{d}u}{u}$, et quand x va de 0 à 1, u va de 1 à e :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+1}=\int_1^e \frac{\mathrm{d}u}{u(u+1)}=\int_1^e \left(\frac{1}{u}-\frac{1}{u+1}\right)\mathrm{d}u=\left[\ln u-\ln(u+1)\right]_1^e=1-\ln(1+e)+\ln 2. \qquad \blacksquare$$

Exemple 22 $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$ (l'aire d'un quart de disque unité).

Démonstration

On pose $x=\sin t$. Alors $\mathrm{d}x=\cos t\,\mathrm{d}t$, et quand t va de 0 à $\dfrac{\pi}{2}$, x va de 0 à 1. De plus, pour $t\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, $\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2 t}=|\cos t|=\cos t$, donc

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2t)}{2}\,\mathrm{d}t=\left[\frac{t}{2}+\frac{\sin(2t)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}. \qquad \blacksquare$$

On peut aussi changer de variable dans une intégrale à borne variable pour obtenir une primitive.

Exemple 23 Une primitive de $x\longmapsto\cos(2\ln x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est $x\longmapsto\dfrac{x}{5}\left(\cos(2\ln x)+2\sin(2\ln x)\right)$.

Démonstration

On pose $u=\mathrm{e}^t$, *i.e.* $t=\ln u$, de sorte que $\mathrm{d}u=\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$:

$$\begin{aligned}\int^x \cos(2\ln u)\,\mathrm{d}u&=\int^{\ln x}\mathrm{e}^t\cos(2t)\,\mathrm{d}t=\mathrm{Re}\left(\int^{\ln x}\mathrm{e}^{(1+2\mathrm{i})t}\,\mathrm{d}t\right)=\mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{e}^{(1+2\mathrm{i})\ln x}}{1+2\mathrm{i}}\right)\\&=\frac{x}{5}\,\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\ln x}(1-2\mathrm{i})\right)=\frac{x}{5}\left(\cos(2\ln x)+2\sin(2\ln x)\right). \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

Lorsqu'une fonction présente une symétrie ou une périodicité, son intégrale se simplifie, et un calcul peut parfois être évité entièrement.

Proposition 24 (Intégrale d'une fonction paire, impaire, périodique)

Soient $f\in\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et $a\in\mathbb{R}$.

(i) **Parité :** Si f est paire, $\displaystyle\int_{-a}^a f(t)\,\mathrm{d}t=2\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$. Si f est impaire, $\displaystyle\int_{-a}^a f(t)\,\mathrm{d}t=0$.

(ii) **Périodicité :** Si f est T-périodique, $\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$.

Démonstration

(i) D'après la relation de Chasles, $\displaystyle\int_{-a}^a f(t)\,\mathrm{d}t=\int_{-a}^0 f(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$.

Dans la première intégrale, on pose $x=-t$: $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$, et quand x va de $-a$ à 0, t va de a à 0. Donc

$$\int_{-a}^0 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^0 f(-t)(-\mathrm{d}t)=\int_0^a f(-t)\,\mathrm{d}t,\qquad\text{d'où}\qquad\int_{-a}^a f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^a\left(f(t)+f(-t)\right)\mathrm{d}t.$$

Si f est paire, $f(t)+f(-t)=2f(t)$; si f est impaire, $f(t)+f(-t)=0$.

(ii) D'après la relation de Chasles, $\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^T f(t)\,\mathrm{d}t+\int_T^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Dans la seconde intégrale, on pose $x = t + T$: $\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$, et quand x va de T à $a+T$, t va de 0 à a. Donc, par T-périodicité,

$$\int_T^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^a f(t+T)\,\mathrm{d}t = \int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t,$$

et, par la relation de Chasles, $\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^T f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t.$ ■

Exemple 25 Les deux intégrales suivantes sont nulles.

(i) $\displaystyle\int_{3+\pi}^{3+3\pi} \sin t\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} \sin t\,\mathrm{d}t = 0$ car l'intervalle est de longueur 2π (période du sinus), puis par imparité du sinus.

(ii) $\displaystyle\int_{-1}^{1} t^4 \sin(t^3)\,\mathrm{d}t = 0$ car la fonction $t \longmapsto t^4\sin(t^3)$ est impaire.

III) Introduction à la décomposition en éléments simples

Objectif : primitiver les fractions rationnelles, quotients de deux polynômes. On admet pour cela quelques résultats sur les polynômes, démontrés dans un chapitre ultérieur. On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels, comme $X^3 - 2X + 1$.

A - Division euclidienne des polynômes

Comme pour les entiers, on peut diviser un polynôme par un autre : le quotient est un polynôme, et le reste est « plus petit » que le diviseur, au sens du degré. Ce résultat est admis ; il sera démontré dans le chapitre sur les polynômes.

Théorème 26 (Division euclidienne)

Soient A et B deux polynômes, avec $B \neq 0$. Il existe un unique couple (Q,R) de polynômes tel que

$$A = BQ + R \qquad \text{et} \qquad \deg R < \deg B \quad (\text{avec la convention } \deg 0 = -\infty).$$

Le polynôme Q est le **quotient** et le polynôme R le **reste** de la division euclidienne de A par B.

Montrons sur un exemple comment effectuer la division euclidienne de $A = 2X^4 - X^3 + 3X - 1$ par $B = X^2 + 1$. On la pose comme une division d'entiers :

$$\begin{array}{rrrr|l}
2X^4 & -X^3 & +3X & -1 & X^2+1 \\
\cline{5-5}
-2X^4 & & -2X^2 & & 2X^2 - X - 2 \\
\cline{1-3}
 & -X^3 & -2X^2 & +3X & -1 \\
 & +X^3 & & +X & \\
\cline{2-4}
 & & -2X^2 & +4X & -1 \\
 & & 2X^2 & & +2 \\
\cline{3-4}
 & & & 4X & +1
\end{array}$$

- **Première étape.** Le terme de plus haut degré de A est $2X^4$, et $\dfrac{2X^4}{X^2} = 2X^2$: c'est le premier terme du quotient. On retranche $2X^2 \times B = 2X^4 + 2X^2$ à A, ce qui donne $-X^3 - 2X^2 + 3X - 1$.
- **Étapes suivantes.** On recommence avec ce nouveau polynôme : $\dfrac{-X^3}{X^2} = -X$, puis $\dfrac{-2X^2}{X^2} = -2$.
- On s'arrête dès que le reste est de degré strictement inférieur à celui de B : ici $\deg(4X+1) = 1 < 2$.
- La division euclidienne de A par B s'écrit donc : $\underbrace{2X^4 - X^3 + 3X - 1}_{A} = \underbrace{(X^2+1)}_{B}\,\underbrace{(2X^2 - X - 2)}_{Q} + \underbrace{4X+1}_{R}$.

Définition 27 (Divisibilité)

Si le reste de la division euclidienne de A par B est nul, alors $A = BQ$ et on dit que B **divise** A.

Proposition 28 (Racine et divisibilité)

Soient P un polynôme et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $P(\lambda) = 0 \iff X - \lambda$ divise P.

Démonstration

La division euclidienne de P par $X-\lambda$ s'écrit $P=(X-\lambda)Q+R$ avec $\deg R<1$, donc R est une constante. En évaluant en λ, on obtient $P(\lambda)=R$. Ainsi $P(\lambda)=0$ si et seulement si $R=0$, *i.e.* si et seulement si $X-\lambda$ divise P. ■

Définition 29 (Multiplicité)

Soient P un polynôme non nul et $\lambda\in\mathbb{R}$. La **multiplicité** de λ dans P est le plus grand entier m tel que $(X-\lambda)^m$ divise P. Si $m=1$, on dit que λ est une racine **simple** de P ; si $m=2$, on dit que λ est une racine **double**.

Exemple 30 Le polynôme $P=(X-2)^2(X^2+1)$ admet 2 pour racine double, et n'a pas d'autre racine réelle.

Lorsque le polynôme est donné sous forme développée, on cherche à le factoriser : on repère une racine évidente, puis on effectue la division euclidienne par le facteur correspondant.

Exemple 31 Le polynôme $P=X^3-5X^2+8X-4$ admet 1 pour racine simple et 2 pour racine double.

Démonstration

On a $P(1)=1-5+8-4=0$, donc $X-1$ divise P. Après division euclidienne de P par $X-1$, on obtient

$$P=(X-1)\left(X^2-4X+4\right)=(X-1)(X-2)^2.$$

On lit sur cette factorisation que 1 est racine simple de P et que 2 en est racine double. ■

Dans ces exemples, les multiplicités se lisent d'un coup d'œil sur la forme factorisée : par exemple, le facteur $(X-2)^2$ apparaît dans l'écriture de P, et X^2+1 ne s'annule pas en 2. Il faudrait néanmoins montrer que $(X-2)^3$ ne divise pas P, ce que nous ne faisons pas ici. La multiplicité d'une racine se lit sur la factorisation, exactement comme l'exposant d'un nombre premier se lit dans la décomposition d'un entier (par exemple $12=2^2\times 3$) ; cela sera justifié dans le chapitre sur les polynômes. L'analogie va plus loin : de même que tout entier se factorise en un produit de nombres premiers, tout polynôme à coefficients réels se factorise en un produit de polynômes « irréductibles ». Ce résultat est lui aussi admis.

Théorème 32 (Factorisation en polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}$)

Soit P un polynôme non nul à coefficients réels. Il s'écrit, de façon unique à l'ordre des facteurs près, comme un produit de polynômes à coefficients réels :

$$P=a\prod_{i=1}^{r}(X-\lambda_i)^{m_i}\prod_{j=1}^{s}\left(X^2+b_jX+c_j\right)^{n_j},$$

où $a\in\mathbb{R}^*$, les λ_i sont des réels distincts, et les trinômes $X^2+b_jX+c_j$ sont distincts et de discriminant **strictement négatif**. Cette écriture est la **factorisation irréductible** de P **sur** $\mathbb{R}$: les facteurs $X-\lambda$ et $X^2+b_jX+c_j$ sont les polynômes irréductibles unitaires de $\mathbb{R}[X]$.

B - Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$

On sait réduire des fractions au même dénominateur : $\dfrac{1}{X}-\dfrac{1}{X+1}=\dfrac{1}{X(X+1)}$. La **décomposition en éléments simples** est l'opération inverse : elle écrit une fraction rationnelle « compliquée » comme une somme de fractions plus simples. L'intérêt est que l'on saura primitiver chacun des termes obtenus. Nous admettons le résultat suivant.

Théorème 33 (Décomposition en éléments simples)

Soient $A, B \in \mathbb{R}[X]$ avec $B \neq 0$, et $B = \gamma \prod_{i=1}^{r} (X-\lambda_i)^{m_i} \prod_{j=1}^{s} \left(X^2+b_jX+c_j\right)^{n_j}$ sa factorisation irréductible sur $\mathbb{R}$. Il existe un unique polynôme E et d'uniques réels $a_{i,k}$, $\alpha_{j,k}$, $\beta_{j,k}$ tels que

$$\frac{A}{B} = E + \sum_{i=1}^{r} \underbrace{\sum_{k=1}^{m_i} \frac{a_{i,k}}{(X-\lambda_i)^k}}_{\text{dus à } (X-\lambda_i)^{m_i}} + \sum_{j=1}^{s} \underbrace{\sum_{k=1}^{n_j} \frac{\alpha_{j,k}X+\beta_{j,k}}{\left(X^2+b_jX+c_j\right)^k}}_{\text{dus à } \left(X^2+b_jX+c_j\right)^{n_j}}.$$

Le polynôme E est la **partie entière** de $\dfrac{A}{B}$ (le quotient de la division euclidienne de A par B), et les termes des sommes sont ses **éléments simples**.

Voyons la méthode générale sur l'exemple suivant : $\dfrac{X^9+1}{(X-1)^3(X+2)(X^2+1)^2}$.

(i) **Calcul de la partie entière.** On effectue la division euclidienne de X^9+1 par le dénominateur : le quotient est $X+1$, et on note R le reste : $X^9+1=(X-1)^3(X+2)(X^2+1)^2(X+1)+R$, d'où

$$\frac{X^9+1}{(X-1)^3(X+2)(X^2+1)^2} = X+1+\frac{R}{(X-1)^3(X+2)(X^2+1)^2}.$$

(ii) **Factorisation du dénominateur.** Il est déjà factorisé, et le trinôme X^2+1 ne se factorise pas sur $\mathbb{R}$ car son discriminant est strictement négatif.

(iii) **Décomposition en éléments simples.** Il existe des réels a,b,c,d,e,f,g,h tels que

$$\frac{X^9+1}{(X-1)^3(X+2)(X^2+1)^2} = X+1+\frac{a}{(X-1)^3}+\frac{b}{(X-1)^2}+\frac{c}{X-1}+\frac{d}{X+2}+\frac{eX+f}{(X^2+1)^2}+\frac{gX+h}{X^2+1}.$$

Il nous reste maintenant à voir comment calculer ces coefficients. Pour cela, on peut utiliser les quatre méthodes suivantes :

(i) Multiplier par $(X-\lambda)^m$ puis évaluer en λ, **réel ou complexe**.
(ii) Multiplier par X puis passer à la limite en $+\infty$ (partie entière nulle).
(iii) Évaluer en un point.
(iv) Mettre au même dénominateur et identifier.

Ces méthodes sont classées de la meilleure à la moins bonne. L'identification des coefficients donne directement un système linéaire (une équation pour chaque coefficient à déterminer) : on peut toujours le résoudre, mais cela devient fastidieux, surtout à partir de 4 inconnues.

Exemple 34 $\dfrac{X+5}{X^2(X-3)} = -\dfrac{5}{3X^2}-\dfrac{8}{9X}+\dfrac{8}{9(X-3)}$.

Démonstration

La partie entière est nulle, donc pour certains réels a,b,c : $\dfrac{X+5}{X^2(X-3)} = \dfrac{a}{X^2}+\dfrac{b}{X}+\dfrac{c}{X-3}$.

- **Calcul de a.** On multiplie par X^2 puis on évalue en 0 : $a = \dfrac{5}{-3} = -\dfrac{5}{3}$.
- **Calcul de c.** On multiplie par $X-3$ puis on évalue en 3 : $c = \dfrac{8}{9}$.
- **Calcul de b.** On ne peut pas récupérer b en multipliant par X puis en évaluant en 0, à cause du pôle double X^2 : le terme $\dfrac{a}{X^2}$ deviendrait $\dfrac{a}{X}$, non défini en 0.

  On multiplie donc par X puis on passe à la limite en $+\infty$: $0 = b+c$, donc $b = -c = -\dfrac{8}{9}$. ■

Exemple 35 $\dfrac{X^3-X^2+2X+2}{(X-1)(X^2+1)} = 1+\dfrac{2}{X-1}-\dfrac{2X+1}{X^2+1}$.

Démonstration

Par division euclidienne, $X^3-X^2+2X+2=\overbrace{\left(X^3-X^2+X-1\right)}^{(X-1)(X^2+1)}\times 1+(X+3)$, donc pour certains réels a,b,c :

$$\frac{X^3-X^2+2X+2}{(X-1)(X^2+1)}=1+\frac{a}{X-1}+\frac{bX+c}{X^2+1}.$$

- **Calcul de a.** On multiplie par $X-1$ puis on évalue en 1 : $a=\dfrac{4}{2}=2$.
- **Calcul de b et c, méthode 1.** On ne peut pas multiplier directement par X puis passer à la limite en $+\infty$: la partie entière 1 deviendrait X, de limite infinie. On passe donc d'abord la partie entière à gauche :

$$\frac{X^3-X^2+2X+2}{(X-1)(X^2+1)}-1=\frac{X+3}{(X-1)(X^2+1)}=\frac{a}{X-1}+\frac{bX+c}{X^2+1},$$

puis on multiplie par X et on passe à la limite en $+\infty$: $0=a+b$, donc $b=-2$.
On évalue ensuite en 0 : $-2=1-a+c$, donc $c=-1$.
- **Calcul de b et c, méthode 2.** On multiplie par X^2+1 puis on évalue en i, racine de X^2+1. La partie entière et le terme en a disparaissent, et il n'est plus besoin de les passer à gauche :

$$b\mathrm{i}+c=\frac{\mathrm{i}^3-\mathrm{i}^2+2\mathrm{i}+2}{\mathrm{i}-1}=\frac{3+\mathrm{i}}{\mathrm{i}-1}=\frac{(3+\mathrm{i})(-1-\mathrm{i})}{2}=-1-2\mathrm{i}.$$

Comme b et c sont réels, on identifie les parties réelles et imaginaires : $b=-2$ et $c=-1$. ■

C - Primitivation des fractions rationnelles

D'après ce qui précède, une fraction rationnelle est la somme de sa partie entière, qui se primitive comme un polynôme, et de ses éléments simples. Il suffit donc de savoir primitiver chaque élément simple.

Pôles réels. Soient $\lambda\in\mathbb{R}$, $k\geqslant 2$ un entier et I un intervalle ne contenant pas λ. Sur I :

$$\int^x \frac{\mathrm{d}t}{t-\lambda}=\ln|x-\lambda| \qquad \int^x \frac{\mathrm{d}t}{(t-\lambda)^k}=-\frac{1}{(k-1)(x-\lambda)^{k-1}}$$

Polynôme du second degré de discriminant strictement négatif, $(X-p)^2+q^2$ avec $q>0$. On primitive sur $\mathbb{R}$.

- **Élément simple $\dfrac{\alpha X+\beta}{(X-p)^2+q^2}$.** On fait apparaître au numérateur la dérivée $2(X-p)$ du dénominateur, pour obtenir un terme de la forme $\dfrac{u'}{u}$; il ne reste plus de X au numérateur du second terme :

$$\frac{\alpha X+\beta}{(X-p)^2+q^2}=\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{2(X-p)}{(X-p)^2+q^2}+(\beta+\alpha p)\frac{1}{(X-p)^2+q^2}.$$

Le premier terme donne un ln, le second un Arctan :

$$\int^x \frac{2(t-p)}{(t-p)^2+q^2}\,\mathrm{d}t=\ln\left((x-p)^2+q^2\right) \qquad \int^x \frac{\mathrm{d}t}{(t-p)^2+q^2}=\frac{1}{q}\operatorname{Arctan}\left(\frac{x-p}{q}\right)$$

- **Puissances : $\dfrac{\alpha X+\beta}{((X-p)^2+q^2)^n}$ avec $n\geqslant 2$.** On fait apparaître $2(X-p)$ de la même façon. Le premier terme est de la forme $\dfrac{u'}{u^n}$, et pour le second, le changement de variable affine $t=p+qu$ ramène à $\dfrac{1}{(1+u^2)^n}$:

$$\int^x \frac{2(t-p)}{((t-p)^2+q^2)^n}\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{(n-1)((x-p)^2+q^2)^{n-1}} \qquad \int^x \frac{\mathrm{d}t}{((t-p)^2+q^2)^n}=\frac{1}{q^{2n-1}}\int^{\frac{x-p}{q}}\frac{\mathrm{d}u}{(1+u^2)^n}$$

Puis $u=\tan\theta$ transforme cette dernière intégrale en une intégrale de $\cos^{2n-2}\theta$, que l'on linéarise.
Par exemple, en posant $u=\tan\theta$, $\mathrm{d}u=\left(1+\tan^2\theta\right)\mathrm{d}\theta$ et

$$\int^x \frac{\mathrm{d}u}{(1+u^2)^2}=\int^{\operatorname{Arctan}x}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\left(\operatorname{Arctan}x+\frac{x}{1+x^2}\right),$$

car $\theta\longmapsto\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{\sin\theta\cos\theta}{2}$ est une primitive de $\cos^2$, et $\sin\theta\cos\theta=\dfrac{\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$.

Exemple 36 Sur $]1,+\infty[$, une primitive de $x\longmapsto\dfrac{x^4+x^2-2x+2}{(x-1)^2(x^2+1)}$ est

$$x\longmapsto x-\frac{1}{x-1}+\ln(x-1)+\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+\operatorname{Arctan}x.$$

Démonstration

On décompose $\dfrac{X^4+X^2-2X+2}{(X-1)^2(X^2+1)}$ en éléments simples. Le dénominateur vaut $X^4-2X^3+2X^2-2X+1$, et la division euclidienne s'écrit

$$X^4+X^2-2X+2=\left(X^4-2X^3+2X^2-2X+1\right)\times 1+\left(2X^3-X^2+1\right).$$

La partie entière vaut donc 1, et pour certains réels a,b,c,d :

$$\frac{X^4+X^2-2X+2}{(X-1)^2(X^2+1)}=1+\frac{a}{(X-1)^2}+\frac{b}{X-1}+\frac{cX+d}{X^2+1}.$$

- **Calcul de a.** On multiplie par $(X-1)^2$ puis on évalue en 1 : $a=\dfrac{2}{2}=1$.
- **Calcul de c et d.** On multiplie par X^2+1 puis on évalue en i : $ci+d=\dfrac{\mathrm{i}^4+\mathrm{i}^2-2\mathrm{i}+2}{(\mathrm{i}-1)^2}=\dfrac{2-2\mathrm{i}}{-2\mathrm{i}}=1+\mathrm{i}$.
  Comme c et d sont réels, on identifie les parties réelles et imaginaires : $c=1$ et $d=1$.
- **Calcul de b.** On passe la partie entière à gauche, on multiplie par X puis on passe à la limite en $+\infty$: $2=b+c$, donc $b=1$.

Ainsi

$$\frac{X^4+X^2-2X+2}{(X-1)^2(X^2+1)}=1+\frac{1}{(X-1)^2}+\frac{1}{X-1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2X}{X^2+1}+\frac{1}{X^2+1}.$$

On conclut en primitivant chaque terme. ■

Un changement de variable bien choisi ramène souvent le calcul à la primitive d'une fraction rationnelle : par exemple, $u=\mathrm{e}^x$ ramène $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+1}$ à $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}}\frac{\mathrm{d}u}{u(u+1)}$. Trouver ce changement de variable n'est pas toujours facile ; pour une fonction rationnelle en $\sin x$ et $\cos x$, les **règles de Bioche** indiquent lequel essayer. On regarde si l'expression $f(x)\,\mathrm{d}x$ (avec le $\mathrm{d}x$) est invariante :

par $x\longmapsto -x$: $t=\cos x$ par $x\longmapsto \pi-x$: $t=\sin x$ par $x\longmapsto \pi+x$: $t=\tan x$

Dans chaque cas, on obtient une fraction rationnelle en t. Si aucune de ces invariances n'a lieu, le changement de variable $t=\tan\dfrac{x}{2}$ fonctionne toujours, au prix de calculs plus lourds.

Exemple 37 Une primitive de $x\longmapsto\dfrac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}$ sur $\mathbb{R}$ est $x\longmapsto\cos x-2\operatorname{Arctan}(\cos x)$.

Démonstration

L'expression $\dfrac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$ est invariante par $x\longmapsto -x$:

$$\frac{\sin^3(-x)}{1+\cos^2(-x)}\,\mathrm{d}(-x)=\frac{-\sin^3 x}{1+\cos^2 x}\,(-\mathrm{d}x)=\frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x.$$

On pose donc $t=\cos u$, $\mathrm{d}t=-\sin u\,\mathrm{d}u$, et on écrit $\sin^2 u=1-t^2$:

$$\int^x\frac{\sin^2 u}{1+\cos^2 u}\sin u\,\mathrm{d}u=-\int^{\cos x}\frac{1-t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=\int^{\cos x}\frac{t^2-1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t.$$

La partie entière de $\dfrac{X^2-1}{X^2+1}$ vaut 1 et le reste -2 : $\dfrac{X^2-1}{X^2+1}=1-\dfrac{2}{X^2+1}$. Une primitive de $t\longmapsto\dfrac{t^2-1}{t^2+1}$ est donc $t\longmapsto t-2\operatorname{Arctan}t$, d'où le résultat en $t=\cos x$. ■