DEVOIR MAISON 2

Trois chemins vers π

La question préliminaire et les problèmes 1 et 2 sont obligatoires ; le problème 3 est facultatif. Les trois problèmes sont indépendants, et la question préliminaire est utilisée dans les problèmes 2 et 3.

Question préliminaire — On rappelle que pour tout $x>0$, $\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$. Dans toute cette question, a et b sont deux réels strictement positifs tels que $ab<1$.

A) Montrer que $\operatorname{Arctan} a + \operatorname{Arctan} b \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

B) Montrer que $\operatorname{Arctan} a + \operatorname{Arctan} b = \operatorname{Arctan}\dfrac{a+b}{1-ab}$.

Problème 1 — (**Problème de Bâle**) Pour tout entier naturel n non nul, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. On a montré en TD que cette suite convergeait vers une limite positive ℓ. Le but de ce problème est de montrer que $\ell = \dfrac{\pi^2}{6}$.

1) a) Montrer que pour tout $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $\dfrac{1}{\tan^2 x} \leqslant \dfrac{1}{x^2} \leqslant \dfrac{1}{\sin^2 x}$, puis que $\dfrac{1}{\sin^2 x} - 1 \leqslant \dfrac{1}{x^2} \leqslant \dfrac{1}{\sin^2 x}$.

b) Montrer que pour tout $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $\dfrac{1}{\sin^2 x} + \dfrac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \dfrac{4}{\sin^2(2x)}$.

2) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2}$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_{2n+1} = \dfrac{1}{4} S_n + T_n$.

b) En déduire que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et exprimer sa limite en fonction de ℓ.

3) Dans cette question, on pose :

$$\forall (k,n) \in \mathbb{N}^2,\ x_{k,n} = \frac{2k+1}{2^n} \times \frac{\pi}{2}, \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \frac{1}{\sin^2(x_{k,n})}.$$

a) Calculer u_1, puis montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1} \frac{1}{\sin^2(x_{k,n+1})} = \sum_{j=0}^{2^{n-1}-1} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - x_{j,n+1}\right)}$.

b) En utilisant la Question 1)b), montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = 4u_n$. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{4^{n+1}}{\pi^2} T_{2^{n-1}-1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \frac{1}{(x_{k,n})^2}$.

d) Déduire de la Question 1)a) que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{\pi^2}{4^{n+1}} u_n - \frac{\pi^2}{2^{n+3}} \leqslant T_{2^{n-1}-1} \leqslant \frac{\pi^2}{4^{n+1}} u_n.$$

e) Calculer la limite de $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et en déduire que $\ell = \dfrac{\pi^2}{6}$.

4) Vitesse de convergence. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{n+1} \leqslant \frac{\pi^2}{6} - S_n \leqslant \frac{1}{n}.$$

En déduire que $\dfrac{\pi^2}{6} - S_n \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$. Lorsque n est grand, on a donc $\dfrac{\pi^2}{6} - S_n \approx \dfrac{1}{n}$. Combien de termes faut-il environ pour que S_n soit une valeur approchée de $\dfrac{\pi^2}{6}$ à 10^{-4} près ?

Problème 2 — (**Arctan et suite de Fibonacci**)

1) On note $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de Fibonacci, définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et on pose

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \text{et} \qquad \psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

a) Vérifier que $\varphi^2 = \varphi + 1$ et $\psi^2 = \psi + 1$, puis montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n = \dfrac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}$. En déduire que $F_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, que $F_n \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{\varphi^n}{\sqrt{5}}$, puis la limite de $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $F_{n+1}^2 - F_nF_{n+2} = (-1)^n$.

c) En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $F_{2n}F_{2n+3} = F_{2n+1}F_{2n+2} - 1$.

2) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\operatorname{Arctan}\frac{1}{F_{2n+1}} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{F_{2n+2}} = \operatorname{Arctan}\frac{1}{F_{2n}}.$$

3) En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n}\operatorname{Arctan}\frac{1}{F_{2k+1}} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}\frac{1}{F_{2n+2}},$$

puis la limite de cette somme quand $n\longrightarrow+\infty$.

4) **Vitesse de convergence.** Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note $\varepsilon_n = \dfrac{\pi}{2} - \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\operatorname{Arctan}\frac{1}{F_{2k+1}}$ l'écart entre cette somme et sa limite.

a) Montrer que pour tout $y\geqslant 0$, $\dfrac{y}{1+y^2}\leqslant\operatorname{Arctan} y\leqslant y$.

b) Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs qui tend vers 0. Montrer que $\operatorname{Arctan}(y_n)\underset{n\longrightarrow\infty}{\sim} y_n$.

En déduire que $\varepsilon_n\underset{n\longrightarrow\infty}{\sim}\dfrac{1}{F_{2n+2}}$, puis que $\varepsilon_n\underset{n\longrightarrow\infty}{\sim}\dfrac{\sqrt{5}}{\varphi^{2n+2}}$. Montrer enfin que pour la somme vue en TD,

$$\sum_{k=0}^{n}\operatorname{Arctan}\frac{1}{k^2+k+1} = \operatorname{Arctan}(n+1),$$

on a $\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(n+1)\underset{n\longrightarrow\infty}{\sim}\dfrac{1}{n}$.

Indication : pour la somme du TD, utiliser le rappel de la question préliminaire.

c) Lorsque n est grand, on a donc $\varepsilon_n\approx\dfrac{\sqrt{5}}{\varphi^{2n+2}}$ et $\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(n+1)\approx\dfrac{1}{n}$. Combien de termes faut-il environ, pour chacune des deux sommes, pour obtenir une valeur approchée de $\dfrac{\pi}{2}$ à 10^{-4} près ? Comparer.

On donne $\ln\varphi\approx 0{,}5$, $\ln 5\approx 1{,}61$ et $\ln 10\approx 2{,}3$.

Problème 3 (*facultatif*) — (**Formules de Leibniz et de Machin**) Pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $x\in\mathbb{R}$, on pose

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

1) Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\operatorname{Arctan}'(x) - P_n'(x) = \dfrac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{1+x^2}$, puis en déduire que

$$\operatorname{Arctan} x - P_n(x) = (-1)^{n+1}\int_0^x\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t,$$

et que pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, $|\operatorname{Arctan} x - P_n(x)|\leqslant\dfrac{x^{2n+3}}{2n+3}$.

2) **Formule de Leibniz et vitesse de convergence.** Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $J_n = \displaystyle\int_0^1\frac{t^{2n}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\left|\dfrac{\pi}{4} - P_n(1)\right| = J_{n+1}\leqslant\dfrac{1}{2n+3}$. En déduire la formule de Leibniz :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}.$$

b) Calculer $J_n + J_{n+1}$ pour $n\in\mathbb{N}$, et montrer que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

c) En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\dfrac{1}{2(2n+3)}\leqslant J_{n+1}\leqslant\dfrac{1}{2(2n+1)}$, puis que $|\pi - 4P_n(1)|\underset{n\longrightarrow\infty}{\sim}\dfrac{1}{n}$.

Lorsque n est grand, on a donc $|\pi - 4P_n(1)|\approx\dfrac{1}{n}$. Combien de termes faut-il environ pour que $4P_n(1)$ soit une valeur approchée de π à 10^{-4} près ?

3) À l'aide de la question préliminaire, montrer que

$$2\operatorname{Arctan}\frac{1}{5} = \operatorname{Arctan}\frac{5}{12},\qquad 4\operatorname{Arctan}\frac{1}{5} = \operatorname{Arctan}\frac{120}{119}\qquad\text{et}\qquad \operatorname{Arctan}1 + \operatorname{Arctan}\frac{1}{239} = \operatorname{Arctan}\frac{120}{119},$$

puis en déduire que $\dfrac{\pi}{4} = 4\operatorname{Arctan}\dfrac{1}{5} - \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{239}$.

4) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $w_n = 16P_n\left(\dfrac{1}{5}\right) - 4P_n\left(\dfrac{1}{239}\right)$. Montrer que $|\pi - w_n|\leqslant\dfrac{20}{(2n+3)\,5^{2n+3}}$. En déduire que w_2 est une valeur approchée de π à 10^{-4} près, puis vérifier à la calculatrice que w_1 n'en est pas une. Comparer avec la Question 2)c).