SUITES RÉELLES

Feuille d'exercices

I) COMPLÉMENTS SUR LES RÉELS

Exercice 1 — Montrer que toute partie non vide majorée de $\mathbb{Z}$ possède un plus grand élément.

Exercice 2 — Soit $x \in \mathbb{R}$. On rappelle que sa partie entière est l'unique entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leqslant x < n+1$. Le but de cet exercice est de démontrer l'existence et l'unicité d'un tel entier.

1) Montrer l'unicité de la partie entière de x.
2) a) ★★ Montrer que si $x \geqslant 0$, $\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leqslant x\}$ possède une borne supérieure, puis que celle-ci est un entier.
   b) En déduire l'existence de la partie entière de x.

Exercice 3 — Déterminer les bornes inférieure et supérieure des parties suivantes :

1) $\left\{(-1)^n + \dfrac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^*\right\}$. 2) $\left\{\dfrac{p+\sqrt{q}}{\sqrt{p}+q} \;\middle|\; p,q \in \mathbb{N}^*\right\}$. 3) $\left\{\dfrac{(-1)^k k}{k+1} \;\middle|\; k \in \mathbb{N}\right\}$.
4) $\left\{\dfrac{pq}{p^2+q^2} \;\middle|\; p,q \in \mathbb{N}^*\right\}$. 5) $\left\{\dfrac{1}{p-q} \;\middle|\; p,q \in \mathbb{Z} \text{ et } p \neq q\right\}$.

Exercice 4 — Soient I un intervalle non vide et $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions majorées.

1) Justifier l'existence de $\sup_I f = \sup f(I)$.
2) Comparer $\sup_I (f+g)$ et $\sup_I f + \sup_I g$. Donner un exemple où l'inégalité est stricte.

Exercice 5 — Pour deux parties A et B de $\mathbb{R}$, on note $AB = \{ab \mid a \in A,\ b \in B\}$.

1) Est-il vrai que $\sup(AB) = (\sup A)(\sup B)$ pour toutes parties non vides et bornées A et B de $\mathbb{R}$?
2) Sous quelle hypothèse supplémentaire le résultat est-il vrai ?

Exercice 6 ★ —

1) Soit $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ une fonction croissante. On veut montrer que f possède un point fixe. On pose $T = \{x \in [0,1] \mid f(x) \leqslant x\}$.
   a) Montrer que T possède une borne inférieure t.
   b) Montrer que $f(t)$ minore T.
   c) Montrer que T est stable par f.
   d) En déduire que $f(t) = t$.
2) Le résultat subsiste-t-il pour $f :]0,1] \longrightarrow]0,1]$ croissante ?

Exercice 7 — (**Théorème des segments emboîtés**) Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de segments non vides, c'est-à-dire telle que $I_{n+1} \subset I_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ est un segment non vide.

II) CALCULS DE LIMITES

Exercice 8 — Étudier la limite des suites de terme général :

1) $\dfrac{n^2 \sin\left(\frac{1}{n}\right) + (-1)^n\sqrt{n}}{2n + \cos n}$, 2) $\dfrac{2^n + (-3)^n}{3^n - n^2}$, 3) $\dfrac{\ln\left(n^2 + \mathrm{e}^n\right)}{\sqrt{n^2+1}}$, 4) $\dfrac{\operatorname{sh} n}{\sqrt{\operatorname{ch}(2n)}}$,
5) $\sqrt[n]{n}$, 6) $\sqrt{n^2+2n} - n$, 7) $\sqrt[3]{n^3+n^2} - n$, 8) $n\left(\sqrt[n]{2} - 1\right)$, 9) $\dfrac{n!}{n^n}$.

Exercice 9 ★ — Soient $a, b > 0$, $x \in \mathbb{R}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Étudier, selon la valeur du ou des paramètres, la limite des suites de terme général :

1) $\dfrac{a^n - a^{-n}}{a^n + 1}$, 2) $\sqrt[n]{a^n + b^n}$, 3) $\dfrac{n^\alpha}{n^\beta + 1}$, 4) $\dfrac{\left\lfloor \sqrt{n^\alpha} \right\rfloor}{n^\alpha}$,
5) $\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^{n^\alpha}$, 6) $\sqrt{\mathrm{e}^n + x^n} - \sqrt{\mathrm{e}^n + 1}$, 7) $\left(\dfrac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$.

Exercice 10 ★★ — Étudier la limite des suites de terme général :

1) $\sqrt{n^2+3n} - \left\lfloor \sqrt{n^2+3n} \right\rfloor$ 2) $\left(\dfrac{\operatorname{sh} n}{\operatorname{ch} n}\right)^{\mathrm{e}^{2n}}$ 3) $\left(\cos\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$

Exercice 11 — Étudier la limite des suites de terme général :

1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$, 2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n+k}}$, 3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(k)}{(n+k)^2}$, 4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k!}{n!}$.

III) LIMITE D'UNE SUITE

Exercice 12 — Soient $\varepsilon > 0$ et $A > 0$. Déterminer un rang, pas forcément le plus petit, à partir duquel :

1) $\dfrac{n}{n^2+1} < \varepsilon$. 2) $\dfrac{\sqrt{n+1}}{n^2-4} < \varepsilon$. 3) $\sqrt{n^2-n} > A$. 4) $3^n - 2^n > A$.

Exercice 13 —

1) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer qu'elle est stationnaire, c'est-à-dire qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = u_N$ pour tout $n \geqslant N$.
2) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors elle est stationnaire.

Exercice 14 ★ — Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle admettant une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Que peut-on dire de la suite $(\lfloor u_n \rfloor)_{n\in\mathbb{N}}$? On discutera selon la valeur de ℓ.

Exercice 15 — Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

1) Si $a_n \neq -1$ pour tout n, montrer que $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \iff \dfrac{a_n}{1+a_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
2) Montrer que $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \implies \dfrac{a_n}{1+a_n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. La réciproque est-elle vraie ?
3) On suppose désormais que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Montrer que si $\dfrac{a_n}{1+a_n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, alors $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Exercice 16 ★ — Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. On suppose que $u_n + \dfrac{1}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$. Étudier la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 17 ★ — Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles.

1) On suppose que $u_n^2 + u_n v_n + v_n^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Montrer que $u_n, v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
2) On suppose que $u_n v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

IV) Suites extraites

Exercice 18 — Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

1) Parmi les suites ci-dessous, trouver celles qui sont extraites d'une autre :

$$(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}},\ (u_{3n})_{n\in\mathbb{N}},\ (u_{6n})_{n\in\mathbb{N}},\ \left(u_{3\cdot 2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}},\ \left(u_{3\cdot 2^{n+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}},\ (u_{2^n})_{n\in\mathbb{N}},\ (u_{2^{n+1}})_{n\in\mathbb{N}}.$$

2) Soit $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que toute suite extraite de $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 19 — Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ suivantes divergent :

1) $u_n = (-1)^n \dfrac{n+1}{n+2}$ 2) $u_n = \cos\left(\left(n+\dfrac{1}{n}\right)\pi\right)$ 3) $u_n = \dfrac{n}{n+1}\sin\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$

Exercice 20 ★ — Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans les deux cas suivants :

1) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
2) $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.

Exercice 21 ★★ — Existe-t-il une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ divergente telle que, pour tout entier $k \geqslant 2$, la suite extraite $(u_{kn})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge ?

Exercice 22 ★★ — (**Cosinus et sinus**) Soient $\theta \in \mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n = \cos(n\theta)$ et $v_n = \sin(n\theta)$.

1) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
2) En déduire que les deux suites divergent.

Indication :

1) Utiliser les formules d'additions de cos *et* sin.
2) Utiliser, en plus, la formule $\cos^2 + \sin^2 = 1$.

Exercice 23 ★★ — Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $u_n = \sqrt{n} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor$.

1) Soit $p\in\mathbb{N}$. Calculer $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ pour tout entier n tel que $p^2 \leqslant n < (p+1)^2$. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante entre les indices p^2 et $(p+1)^2-1$.
2) Exhiber des suites extraites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limites 0 et 1.
3) Soit $x \in]0,1[$. Montrer que x est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4) En déduire l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Indication :

3) On cherche n tel que $\sqrt{n} \approx p + x$ *: poser* $n_p = \lfloor (p+x)^2 \rfloor$.

V) Théorèmes d'existence de limite

Exercice 24 — (**Somme harmonique**) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1) Montrer que $H_{2n} - H_n \geqslant \dfrac{1}{2}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, puis que $H_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
2) Retrouver ce résultat en comparant H_n à $\displaystyle\int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t}$.

Exercice 25 — Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

1) Montrer que $\dfrac{1}{(k+1)^2} \leqslant \dfrac{1}{k(k+1)}$ pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, puis que $S_n \leqslant 2 - \dfrac{1}{n}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$. En déduire que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
2) Retrouver ce résultat en comparant S_n à une intégrale.

Exercice 26 — Soient $a>0$ et $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1+a^k\right)$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

1) Montrer que si $a \geqslant 1$, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
2) On suppose $0<a<1$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

Indication : Question 2 : établir l'inégalité $1+x \leqslant \mathrm{e}^x$ *pour tout* $x\in\mathbb{R}$*, puis majorer* u_n.

Exercice 27 ★ — Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée. On pose

$$a_n = \inf_{p\geqslant n} u_p \quad \text{et} \quad b_n = \sup_{p\geqslant n} u_p.$$

1) Montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.
2) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si, et seulement si, les limites des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont identiques.

Exercice 28 ★ — Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$ et $S'_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

1) Établir que, pour tout réel $p>1$, $\int_p^{p+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} \leqslant \frac{1}{p} \leqslant \int_{p-1}^{p} \frac{\mathrm{d}x}{x}$.
En déduire la limite de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
2) Établir que $S'_{2n} = S_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$. En déduire la limite de $\left(S'_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 29 ★ — (**Critère de Cauchy**) On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie le critère de Cauchy si $\forall \varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N},\ \forall p,q\geqslant N,\ \left|u_p-u_q\right|\leqslant\varepsilon$.

1) Montrer qu'une suite convergente vérifie le critère de Cauchy.
2) Réciproquement, montrer à l'aide du théorème de Bolzano-Weierstrass qu'une suite vérifiant le critère de Cauchy converge.

Exercice 30 ★★ — Soient $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}\in(\mathbb{Z}^*)^{\mathbb{N}}$ telles que $\frac{p_n}{q_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$. Montrer que $|p_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et $|q_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

VI) Suites adjacentes

Exercice 31 — Soient $a,b>0$. On définit deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $a_0=a$ et $b_0=b$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}.$$

Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont convergentes de même limite. Cette limite qu'on ne calculera pas est appelée la **moyenne arithmético-géométrique** de a et b.

Exercice 32 ★ — Soit $\theta\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$. On pose, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$u_n = 2^n \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right) \quad \text{et} \quad v_n = 2^n \tan\left(\frac{\theta}{2^n}\right).$$

Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et donner leur limite commune.

Exercice 33 ★ — (**Constante d'Euler**) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et

$$u_n = H_n - \ln n \quad \text{et} \quad v_n = H_n - \ln(n+1).$$

1) Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes. Leur limite commune, notée γ, est appelée **constante d'Euler**.
2) En déduire que $H_n \underset{n\to\infty}{\sim} \ln n$.

Exercice 34 ★ — (**Critère spécial des séries alternées**)

1) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de limite nulle. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Montrer que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, puis que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
2) En déduire que la suite de terme général $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}$ converge.

Exercice 35 ★ — Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}, \qquad a_n = n u_n^2 \quad \text{et} \quad b_n = \left(n+\frac{1}{2}\right) u_n^2.$$

Montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent vers une même limite strictement positive.

Exercice 36 ★★ — **Irrationalité du nombre de Neper**

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \text{ et } b_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n\cdot n!} = a_n + \frac{1}{n\cdot n!}$$

1) Montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont strictement adjacentes (c'est-à-dire adjacentes et strictements monotones).
2) Montrer que leur limite commune est un nombre irrationnel.

VII) Suites récurrentes

Exercice 37 — Exprimer u_n en fonction de n, puis étudier la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, lorsque pour tout $n\in\mathbb{N}$:

1) $u_0=1$ et $u_{n+1}=3u_n-4$. 2) $u_0=0$ et $u_{n+1}=1-\frac{u_n}{3}$.
3) $u_0=1$ et $u_{n+1}=\frac{u_n^3}{4}$. 4) $u_0>0$ et $u_{n+1}=\frac{u_n}{u_n+2}$ (poser $v_n=\frac{1}{u_n}$).

Exercice 38 ★ — Étudier, en fonction de u_0, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_{n+1}=f(u_n)$ dans chacun des cas suivants.

1) $f(x)=x-1+\mathrm{e}^{1-x}$. 2) $f(x)=\sqrt{3x+4}$. 3) $f(x)=2+\ln(x-1)$.
4) $f(x)=\frac{x^2+1}{2}$. 5) ★ $f(x)=\frac{x^2+3x}{4}$.

Exercice 39 ★★ — Soient $f : x \longmapsto x^2-1$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On note $a = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $b = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

1) Déterminer les points fixes de f et le signe de $f(x)-x$ selon $x \in \mathbb{R}$.
2) On suppose $|u_0| \geqslant b$. Montrer que $[b, +\infty[$ est stable par f, puis étudier $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3) On suppose $u_0 \in [-1, 0]$, et on note $g = f \circ f$.
   a) Montrer que $[-1, 0]$ est stable par f, et que g est croissante sur $[-1, 0]$. En déduire que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones, de sens de variation contraires.
   b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x)-x = x(x+1)\big(x^2-x-1\big)$.
   c) Montrer que $[-1, a]$ et $[a, 0]$ sont stables par g, puis étudier $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ selon la valeur de u_0.
4) On suppose $0 < u_0 < b$.
   a) Montrer que $]0, b[$ n'est pas stable par f, et que si $u_n \in]0, b[$, alors $u_{n+1} < u_n$.
   b) Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N \in]-1, 0]$ (on pourra raisonner par l'absurde).
   c) Conclure, puis traiter le cas $-b < u_0 < -1$.
5) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si elle est stationnaire.

Exercice 40 ★★ — Soient $k > 0$, $f : x \longmapsto \dfrac{k}{1+x^2}$, $g = f \circ f$, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer que $u_n \in]0, k]$ pour tout $n \geqslant 1$, et que f admet un unique point fixe ℓ, avec $\ell \in]0, k[$.
2) Montrer que g est croissante sur $\mathbb{R}_+$. En déduire que $(u_{2n})_{n\geqslant 1}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones, de sens de variation contraires.
3) Soient $\alpha \neq \beta$ deux réels. Montrer que $f(\alpha) = \beta$ et $f(\beta) = \alpha$ si et seulement si $\alpha\beta = 1$ et $\alpha + \beta = k$. En déduire les points fixes de g selon la valeur de k.
4) On suppose $k \leqslant 2$.
   a) Montrer que $g(x) > x$ pour $x \in [0, \ell[$, et $g(x) < x$ pour $x > \ell$.
   b) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.
5) On suppose $k = 10$.
   a) Calculer ℓ, puis les points fixes $\alpha < \beta$ de g autres que ℓ.
   b) Déterminer le signe de $g(x)-x$ pour $x \in \mathbb{R}_+$ (on pourra calculer $f(1)$ et $f(3)$).
   c) Étudier $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ selon la valeur de u_0. Pour quelles valeurs de u_0 la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ?

VIII) Suites définies implicitement

Exercice 41 —

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $xe^x = n$ possède une unique solution x_n dans $\mathbb{R}_+$. Montrer que $x_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} +\infty$.
2) Simplifier $x_n + \ln x_n$ pour $n \geqslant 1$, puis en déduire que $x_n \underset{n\longrightarrow\infty}{\sim} \ln n$.

Exercice 42 ★ —

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x^n = e^{-x}$ possède une unique solution x_n dans $\mathbb{R}_+$, et que $x_n \in]0, 1[$.
2) Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et montrer que $x_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 1$.

Exercice 43 ★ — Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on étudie l'équation

$$(E_n) : x^n + x^{n-1} + \cdots + x = 1$$

1) Montrer que l'équation (E_n) possède une unique solution x_n dans $\mathbb{R}_+$ et que x_n est élément de l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$.
2) Montrer la convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et déterminer sa limite.

Exercice 44 ★★ —

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $\ln x + n\sqrt{x} = 0$ possède une unique solution x_n dans $]0, +\infty[$, et que $x_n \in]0, 1[$.
2) Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante, puis que $x_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0$.
3) On pose $y_n = n\sqrt{x_n}$. Montrer que $y_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} +\infty$ et simplifier $y_n + 2\ln y_n$.
4) En déduire que $x_n \underset{n\longrightarrow\infty}{\sim} \dfrac{4\ln^2 n}{n^2}$.

IX) Théorème de Cesàro

Exercice 45 ★ —

1) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Montrer que si $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $\dfrac{u_n}{n} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} \ell$.
2) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$. Montrer que si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} \ell \in \mathbb{R}_+$, alors : $\sqrt[n]{u_n} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} \ell$.
3) En déduire $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dbinom{2n}{n}^{1/n}$ et $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.

Exercice 46 ★ — Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Étudier la nature de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et sa limite éventuelle.
2) Calculer $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} (e^{u_{n+1}} - e^{u_n})$, puis en déduire que $u_n \underset{n\longrightarrow\infty}{\sim} \ln n$ grâce au théorème de Cesàro.