DEVOIR SURVEILLÉ 2

Applications, relations binaires, dénombrement, fonctions réelles

Problème 1 — Soient E un ensemble, A et B deux parties de E. On définit

$$f : \mathscr{P}(E) \longrightarrow \mathscr{P}(E), \qquad X \longmapsto (X \cap A) \cup B.$$

1) Expliciter f lorsque $A = \varnothing$, puis lorsque $B = E$.

2) Dans le cas général, calculer $f(\varnothing)$, $f(A)$, $f(B)$ et $f(E)$.

3) Montrer que f est croissante pour l'inclusion : pour tous $X, Y \in \mathscr{P}(E)$, $\quad X \subset Y \implies f(X) \subset f(Y)$.

4) Soit $Y \in \mathscr{P}(E)$. Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes :
- (i) Y admet un antécédent par f ;
- (ii) $B \subset Y \subset A \cup B$;
- (iii) $f(Y) = Y$.

5) **a)** Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que f soit constante.
b) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que f soit surjective.
c) Montrer que cette dernière condition est aussi nécessaire et suffisante pour que f soit injective.

6) Montrer que $f \circ f = f$. En utilisant uniquement ce résultat, retrouver que f est injective si et seulement si f est surjective.

7) Déterminer les antécédents de A par f, puis ceux de B.

8) **Une autre application.** Cette question est indépendante des précédentes. Pour $X \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$, on note $2X = \{2x \mid x \in X\}$ et $2X+1 = \{2x+1 \mid x \in X\}$. On pose, pour tout $(X,Y) \in \mathscr{P}(\mathbb{N})^2$, $\quad F(X,Y) = 2X \cup (2Y+1)$.
a) Soient $(X,Y) \in \mathscr{P}(\mathbb{N})^2$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\quad 2n \in F(X,Y) \iff n \in X \quad$ et $\quad 2n+1 \in F(X,Y) \iff n \in Y$.
b) L'application $F : \mathscr{P}(\mathbb{N})^2 \longrightarrow \mathscr{P}(\mathbb{N})$ est-elle injective ?
c) Est-elle surjective ?

Problème 2 — Les questions sont indépendantes.

1) On définit sur $\mathbb{R}^2$ la relation : $\quad (x,y) \sim (x',y') \iff \exists a > 0,\ \exists b > 0,\ x' = ax$ et $y' = by$.
a) Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^2$.
b) Donner la classe d'équivalence des points $(1,0)$, $(0,-1)$ et $(1,1)$.

2) Soient E un ensemble, $\preccurlyeq$ une relation d'ordre sur E et A une partie de E. On appelle **minorant** de A tout élément $m \in E$ tel que $m \preccurlyeq a$ pour tout $a \in A$, et **plus petit élément** de A tout minorant de A qui appartient à A ; on définit de même un **majorant** et un **plus grand élément** de A.
Pour tous $(x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2$, on pose : $\quad (x,y) \lhd (x',y') \iff \big(x+y < x'+y'\big)$ ou $\big(x+y = x'+y'$ et $y \leqslant y'\big)$.
a) Montrer que $\lhd$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^2$. Est-elle totale ?
b) Déterminer et représenter graphiquement l'ensemble des minorants de $\{(1,1)\}$ pour $\lhd$.
c) Montrer que $\mathbb{R}_+^2$ possède un plus petit élément pour $\lhd$, mais pas $\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$. Qu'en est-il de $\mathbb{N}^2 \setminus \{(0,0)\}$?
d) Le cercle d'équation $x^2+y^2=2$ possède-t-il un plus grand élément pour $\lhd$?
On pourra démontrer que $2xy \leqslant x^2+y^2$ en étudiant le cas d'égalité.

3) **a)** Montrer qu'il n'existe aucune relation d'ordre total $\preceq$ sur $\mathbb{C}$ compatible avec les opérations, c'est-à-dire telle que pour tous $a,b,c \in \mathbb{C}$:

$$a \preceq b \implies a+c \preceq b+c \qquad \text{et} \qquad \big(0 \preceq a \text{ et } 0 \preceq b\big) \implies 0 \preceq ab.$$

Indication : Si une telle relation d'ordre existe, que dire de z^2 pour $z \in \mathbb{C}$ quelconque ?
b) Montrer en outre que la relation d'ordre sur $\mathbb{C}$ obtenue en identifiant $z = x+iy$ au couple $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et en reprenant la relation de la Question 2 n'est pas compatible avec les opérations.

Problème 3 — Les questions sont indépendantes. Les résultats peuvent être laissés sous forme de factorielles ou de coefficients binomiaux, sans calcul numérique, mais ils doivent être simplifiés : on écrira par exemple $\dfrac{6!}{2!\,2!}$ plutôt que $\binom{6}{2}\binom{4}{2}2!$.

1) On s'intéresse aux anagrammes du mot COLLOSCOPE.
a) Combien le mot COLLOSCOPE possède-t-il d'anagrammes ?
b) Combien possède-t-il d'anagrammes commençant par une consonne ?

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Combien existe-t-il d'applications $f : [\![1;2n]\!] \longrightarrow [\![1;2n]\!]$ telles que, pour tout $k \in [\![1;2n]\!]$, $f(k)$ et k aient la même parité ?

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Combien l'ensemble $[\![1;3n]\!]$ possède-t-il de parties contenant autant d'entiers divisibles par 3 que d'entiers qui ne le sont pas ? On donnera le résultat sous forme simplifiée, sans symbole Σ.

Problème 4 — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle **dérangement** de $[\![1;n]\!]$ toute bijection $\sigma : [\![1;n]\!] \longrightarrow [\![1;n]\!]$ sans point fixe, c'est-à-dire telle que $\sigma(k) \neq k$ pour tout $k \in [\![1;n]\!]$. On note d_n le nombre de dérangements de $[\![1;n]\!]$, et on pose $d_0 = 1$.

On admet la **formule d'inversion de Pascal**, démontrée au DS 1 : si $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont deux suites réelles telles que $b_p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} a_k$ pour tout $p \in \mathbb{N}$, alors : $\forall p \in \mathbb{N},\ a_p = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} b_k$.

1) Expliciter les dérangements de $[\![1;1]\!]$, de $[\![1;2]\!]$ et de $[\![1;3]\!]$, et donner d_1, d_2, d_3.

2) Montrer que $n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_{n-k}$, puis en déduire que $n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k$. En déduire les valeurs de d_4 et d_5.

3) En déduire que $d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

4) Cinq couples de danseurs se rendent à un bal. On sépare hommes et femmes, puis chaque femme choisit un cavalier parmi les cinq hommes, deux femmes ne pouvant pas choisir le même.

a) Combien y a-t-il de répartitions possibles ?

b) Combien de répartitions ne reconstituent aucun couple d'origine ? Exactement un couple d'origine ?

Problème 5 —

Partie I. Étude de $f : x \longmapsto xe^x$

1) On note $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto xe^x$. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

2) Déterminer les tangentes à la courbe de f aux points d'abscisses -1, 0 et 1, et les positions relatives de la courbe et de ces tangentes au voisinage de ces points.

3) Tracer l'allure de la courbe de f, en faisant apparaître ces tangentes.

4) Justifier que f réalise une bijection de $[-1,+\infty[$ sur un intervalle J à préciser. On note $\varphi : [-1,+\infty[\longrightarrow J$ cette bijection.

5) On étudie la dérivabilité de φ^{-1}.

a) À l'aide du théorème de dérivation d'une bijection réciproque, montrer que φ^{-1} est dérivable sur $\left]-\frac{1}{e},+\infty\right[$ et exprimer $\left(\varphi^{-1}\right)'(y)$ à l'aide de $\varphi'\left(\varphi^{-1}(y)\right)$. En déduire $\left(\varphi^{-1}\right)'(0)$ et $\left(\varphi^{-1}\right)'(e)$.

b) On suppose que φ^{-1} est dérivable en $-\frac{1}{e}$. En dérivant la relation $\varphi\left(\varphi^{-1}(y)\right) = y$ en $y = -\frac{1}{e}$, aboutir à une contradiction. Conclure.

Partie II. Images directes

Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Pour toute partie A de $\mathbb{R}$, on note $g(A) = \{g(x) \mid x \in A\}$.

6) Expliciter, sans autre justification qu'un tableau de variations précis, les ensembles

$$f(]-\infty,-1]), \qquad f(]-\infty,0]), \qquad f(]-\infty,1]) \qquad \text{et} \qquad f([-1,1]).$$

7) Soient A, B deux parties de $\mathbb{R}$. Montrer que $A \subset B \implies g(A) \subset g(B)$, puis que $g(A \cup B) = g(A) \cup g(B)$ et que $g(A \cap B) \subset g(A) \cap g(B)$.

8) À l'aide de la fonction f, construire deux parties A et B de $\mathbb{R}$ telles que $f(A) \cap f(B) \not\subset f(A \cap B)$.

Problème 6 —

1) Montrer que pour tout $x > 0$, $\quad \frac{1}{1+x} \leqslant \ln(1+x) - \ln x \leqslant \frac{1}{x}$.

2) Soit $k \geq 2$ un entier. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{p=n+1}^{kn} \frac{1}{p}$.

Encadrer u_n à l'aide de logarithmes et en déduire la limite de (u_n).