FONCTIONS RÉELLES

Dans tout ce chapitre $E, F, \ldots$ désignent des parties quelconques de $\mathbb{R}$.

Table des matières

I Généralités **1**
A - Monotonie . . . 1
B - Majorants/minorants, maximum/minimum . . . 3
C - Transformation affine du graphe d'une fonction . . . 3

II Limites, continuité, dérivabilité, convexité **5**
A - Limites . . . 5
B - Continuité . . . 6
C - Dérivabilité, dérivées successives . . . 7
D - Convexité/concavité . . . 10

III Fonctions usuelles **11**
A - Fonctions polynomiales . . . 11
B - Fonction logarithmique et exponentielle . . . 12
C - Fonctions puissances . . . 13
D - Fonctions hyperboliques . . . 14

IV Fonctions trigonométriques **15**
A - Sinus, cosinus et tangente . . . 15
B - Tangente . . . 17
C - Arcsinus, arccosinus et arctangente . . . 18

V Tableaux récapitulatifs **20**

I) GÉNÉRALITÉS

A - MONOTONIE

On définit une fonction croissante (resp. décroissante) comme une fonction qui préserve (resp. renverse) les inégalités. Cette définition est générale et ne dépend pas de l'éventuelle dérivabilité de la fonction.

Définition 1 (Fonction monotone)

Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est

croissante si : $\forall x, y \in E, \quad x \leqslant y \implies f(x) \leqslant f(y)$;
strictement croissante si : $\forall x, y \in E, \quad x < y \implies f(x) < f(y)$;
décroissante si : $\forall x, y \in E, \quad x \leqslant y \implies f(x) \geq f(y)$;
strictement décroissante si : $\forall x, y \in E, \quad x < y \implies f(x) > f(y)$.

Enfin, on dit que f est (resp. **strictement**) **monotone** si f est (resp. strictement) croissante ou décroissante.

Pourquoi peut-on passer au carré dans $0 \leqslant x \leqslant y$? Parce que la fonction carrée est croissante sur $\mathbb{R}_+$. En revanche, on n'élève pas l'inégalité $-4 \leqslant 2$ au carré, car la fonction carrée n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$. De même, si on multiplie une inégalité par -1, le sens de l'inégalité s'inverse parce que la fonction $x \longmapsto -x$ est décroissante.

Proposition 2 (La stricte monotonie implique l'injectivité)

Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Si f est strictement monotone alors elle est injective.

Démonstration

Quitte à remplacer f par $-f$, il suffit de traiter le cas où f est strictement croissante. Soient $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$. Si $x > x'$ alors, par stricte croissance $f(x) > f(x')$ ce qui est exclu. De même, si $x < x'$ alors $f(x) < f(x')$ ce qui est également exclu. On a donc $x = x'$. ■

⚠ La réciproque est fausse : la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est injective mais n'est même pas monotone.

ℹ La réciproque devient vraie avec deux hypothèses supplémentaires : si I est un INTERVALLE et si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est CONTINUE et injective, alors f est strictement monotone.
Aucune des deux hypothèses ne peut être retirée : $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est continue et injective sur $\mathbb{R}^*$, qui n'est pas un intervalle, et la fonction définie sur $[0,2]$ par $f(x) = x$ si $x < 1$ et $f(x) = 3 - x$ si $x \geq 1$ est injective mais pas continue.
La démonstration de ce résultat est moins simple qu'il n'y paraît : elle repose sur le théorème des valeurs intermédiaires et sera faite dans le chapitre « Limites et continuité ».

Proposition 3 (Opérations sur les fonctions monotones)
Les résultats suivants sont énoncés pour de la monotonie large mais sont également vrais pour de la monotonie stricte.
(i) **Addition :** Soient $f, g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions.
Si f et g sont croissantes (resp. décroissantes) alors $f + g$ est aussi croissante (resp. décroissante).
(ii) **Produit :** Soient $f, g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions.
Si f et g sont croissantes (resp. décroissantes) POSITIVES alors fg est aussi croissante (resp. décroissante).
(iii) **Composition :** Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions.
  (a) Si f et g sont monotones de même sens de variation alors $g \circ f$ est croissante.
  (b) Si f et g sont monotones de sens de variation opposés alors $g \circ f$ est décroissante.
(iv) **Réciproque :** Soit $f : E \longrightarrow F$ une fonction bijective.
Si f est monotone elle l'est strictement. De plus, f^{-1} est (strictement) monotone de même sens de variation.

⚠ La fonction $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ est croissante sur $\mathbb{R}$ mais son carré $x \longmapsto x^2$ n'est ni croissante ni décroissante. L'hypothèse de positivité est donc très importante.

Démonstration
(i) **Addition :** Supposons f et g croissantes et soient $x, y \in E$ tels que $x \leqslant y$. Par croissance de f et de g, $f(x) \leqslant f(y)$ et $g(x) \leqslant g(y)$ donc, par somme, $f(x) + g(x) \leqslant f(y) + g(y) : f + g$ est croissante.
(ii) **Produit :** Supposons f et g croissantes et soient $x, y \in E$ tels que $x \leqslant y$. Alors, par croissance de f et de g : $0 \leqslant f(x) \leqslant f(y)$ et $0 \leqslant g(x) \leqslant g(y)$. Par produits d'inégalités positives, on a donc $0 \leqslant f(x)g(x) \leqslant f(y)g(y)$. Ainsi fg est croissante.
(iii) **Composition :**
  (a) Supposons f et g croissantes et soient $x, y \in E$ tels que $x \leqslant y$. On a, par croissance de f, $f(x) \leqslant f(y)$ et, par croissance de g, on obtient $g(f(x)) \leqslant g(f(y))$. Donc $g \circ f$ est croissante.
  Si f et g sont décroissantes alors les inégalités se renversent deux fois.
  (b) Si f est croissante et g est décroissante (ou l'inverse) alors on change une fois l'ordre de l'inégalité. Ainsi, la fonction $g \circ f$ est décroissante.
(iv) **Réciproque :**
- Supposons f croissante et soient $x, y \in E$ tels que $x < y$. Par croissance de f, $f(x) \leqslant f(y)$; par injectivité, $x \neq y$ donne $f(x) \neq f(y)$. Donc $f(x) < f(y)$ et f est strictement croissante.
- On suppose encore f croissante et on raisonne par contraposée. Soient $y, y' \in F$ tels que $f^{-1}(y) > f^{-1}(y')$. Par stricte croissance de f, on a $y = f\left(f^{-1}(y)\right) > f\left(f^{-1}(y')\right) = y'$.
Ainsi f^{-1} est aussi croissante (donc strictement croissante). ■

ℹ
- Pour l'addition, seule une des deux fonctions a besoin d'être strictement croissante.
- Pour la multiplication, une des deux suffit également si les deux fonctions sont strictement positives.
- Composer par une fonction monotone conserve ou inverse le sens de variation, selon le sens de variation. En particulier, f et $-f$ ont des sens de variation opposés.

Exemple 4 La fonction $x \longmapsto \sqrt{x}\mathrm{e}^{x^2} + x$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

B - Majorants/minorants, maximum/minimum

Définition 5 (Fonction majorée/minorée/bornée)

Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- On dit que f est **majorée** si : $\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in E, \quad f(x) \leqslant M$.
  Un tel réel M est appelé UN **majorant** de f et on dit dans ce cas que f est **majorée** par M ou que M **majore** f.
- On dit que f est **minorée** si : $\exists m \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in E, \quad f(x) \geq m$.
  Un tel réel m est appelé UN **minorant** de f et on dit dans ce cas que f est **minorée** par m ou que m **minore** f.
- On dit que f est **bornée** si : $\exists K \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in E, \quad |f(x)| \leqslant K$.
  Une fonction est bornée si et seulement si elle est minorée et majorée.

Démonstration

- Si f est bornée alors soit $K \in \mathbb{R}$ tel que $-K \leqslant f \leqslant K$. On pose $m = -K$ et $M = K$, on a donc $m \leqslant f \leqslant M$ ce qui montre que f est minorée et majorée.
- Si f est minorée et majorée alors soient $m, M \in \mathbb{R}$ tels que $m \leqslant f \leqslant M$. Posons $K = \max(|m|, |M|)$.
  On a alors $M \leqslant |M| \leqslant K$ et $m \geq -|m| \geq -K$, ce qui donne $-K \leqslant f \leqslant K$ et donc f est bornée par K. ■

Définition 6 (Maximum/minimum d'une fonction)

Soient $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in E$.

On dit que f admet un **maximum** en a si : $\forall x \in E, \quad f(x) \leqslant f(a)$. Le réel $f(a)$ est alors appelé le **maximum** de f et est noté $\max\limits_{E} f$ ou $\max\limits_{x \in E} f(x)$.

On dit que f admet un **minimum** en a si : $\forall x \in E, \quad f(x) \geq f(a)$. Le réel $f(a)$ est alors appelé le **minimum** de f et est noté $\min\limits_{E} f$ ou $\min\limits_{x \in E} f(x)$.

Un maximum (resp. minimum) est donc un majorant (resp. minorant) qui est atteint par la fonction.

⚠ Une fonction peut ne pas avoir de maximum/minimum. En revanche, si elle en a un, elle n'en a qu'un seul qui peut être atteint plusieurs fois.

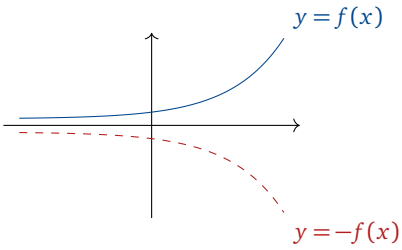
Exemple 7 La fonction $x \longmapsto e^x$ n'admet ni minimum ni maximum sur $\mathbb{R}$ bien qu'elle soit minorée par 0.

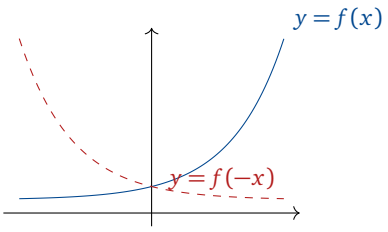
Exemple 8 La fonction cosinus admet 1 comme maximum et ce maximum est atteint en chaque multiple de 2π.

C - Transformation affine du graphe d'une fonction

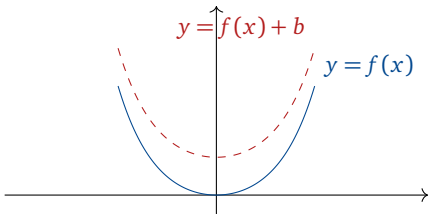
Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

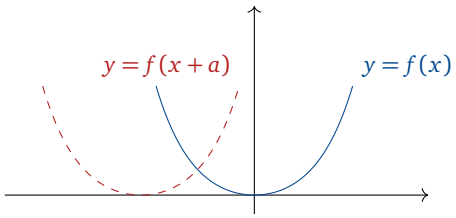
- **(Symétries) :**
  - Le graphe de la fonction $x \longmapsto -f(x)$ s'obtient à partir de celui de f en effectuant une symétrie par rapport à l'axe des abscisses.
  - Le graphe de la fonction $x \longmapsto f(-x)$ s'obtient à partir de celui de f en effectuant une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.



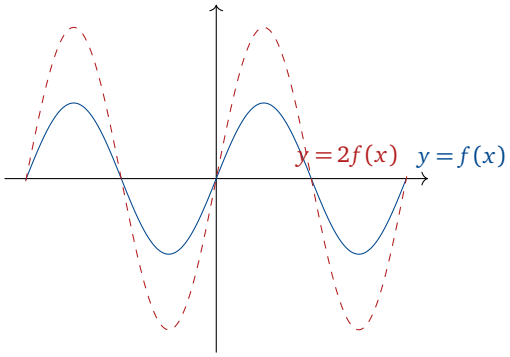


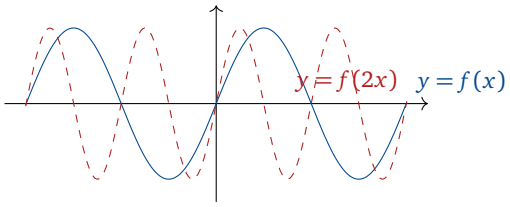
- **(Translations) :**
  - Le graphe de la fonction $x \longmapsto f(x) + b$ s'obtient à partir de celui de f en effectuant une translation de vecteur $b\vec{j}$.
  - Le graphe de la fonction $x \longmapsto f(x + a)$ s'obtient à partir de celui de f en effectuant une translation de vecteur $\boxed{-a}\vec{i}$.





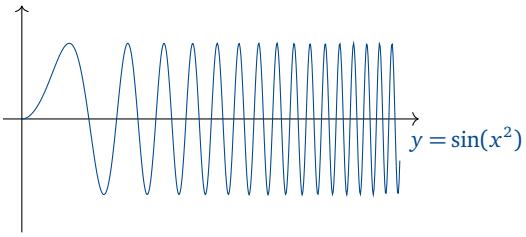
- **(Contractions/dilatations) :** Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.
  - ▷ Le graphe de la fonction $x \longmapsto \lambda f(x)$ s'obtient à partir de celui de f en effectuant une dilatation verticale de rapport λ si $\lambda > 1$ et une contraction verticale de rapport $\dfrac{1}{\lambda}$ si $\lambda < 1$.
  - ▷ Le graphe de la fonction $x \longmapsto f(\lambda x)$ s'obtient à partir de celui de f en effectuant une contraction horizontale de rapport λ si $\lambda > 1$ et une dilatation de rapport $\dfrac{1}{\lambda}$ si $\lambda < 1$.

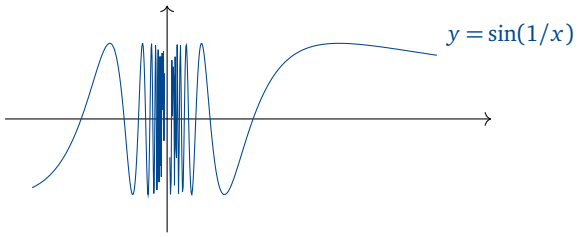




Exemple 9 La fonction $x \longmapsto \cos(2x)$ est un cosinus qui parcourt ses valeurs 2 fois plus rapidement. Il est donc écrasé horizontalement.

À partir de ces transformations affines, on peut extrapoler ce qui se passe pour les graphes de fonctions comme $x \longmapsto \sin(x^2)$ et $x \longmapsto \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Dans le premier cas, les valeurs sont parcourues de plus en plus vite : le graphe est donc de plus en plus écrasé horizontalement lorsqu'on s'approche de l'infini. Le second cas est similaire, mais cette fois lorsqu'on s'approche de 0.





Définition 10 (Fonction paire/impaire)

On suppose E symétrique par rapport à 0 : $\forall x \in E,\ -x \in E$. Soit $f : E \longrightarrow F$ une fonction.

- **Parité :** On dit que f est **paire** si $\forall x \in E,\quad f(-x) = f(x)$.
  Le graphe de f est alors symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- **Imparité :** On dit que f est **impaire** si $\forall x \in E,\quad f(-x) = -f(x)$.
  Le graphe de f est alors symétrique par rapport à l'origine.

Exemple 11 Les fonctions $x \longmapsto x^2$, $x \longmapsto \cos x$ et $x \longmapsto |x|$ sont paires tandis que les fonctions $x \longmapsto x^3$, $x \longmapsto \sin x$ et $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ sont impaires.

Pour étudier une fonction paire/impaire, il suffit de l'étudier sur $E \cap \mathbb{R}_+$.

Proposition 12 (Réciproque d'une fonction impaire bijective)

Soit $f : E \longrightarrow F$ une fonction bijective de E sur F.
Si E est symétrique par rapport à 0 et si f est impaire alors F est symétrique par rapport à 0 et f^{-1} est impaire.

Démonstration

Supposons que E est symétrique par rapport à 0 et que f est impaire.
Soit $y \in F$. Par hypothèse, f est bijective donc surjective. Ainsi, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Par imparité de f, $-y = -f(x) = f(-x) \in F$. On vient de montrer que F est symétrique par rapport à 0.
De plus, $f^{-1}(-y) = -x = -f^{-1}(y)$ pour tout $y \in F$ et donc f^{-1} est impaire. ■

Définition 13 (Fonction périodique)

Soit $T > 0$. On suppose que E est **T-périodique** : $\forall x \in E,\ x + T \in E$ et $x - T \in E$. Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.
On dit que f est **T-périodique** ou **périodique de période T** si $\forall x \in E,\ f(x + T) = f(x)$.
Le réel T est alors appelé UNE **période** de f.

Pour étudier une fonction T-périodique, il suffit de l'étudier sur une période, par exemple $E \cap [0, T[$.

⚠ Si une fonction est de période T, elle l'est aussi de période $2T$, $3T$, etc. On parle donc d'UNE période.
Certaines fonctions n'ont pas de plus petite période comme une fonction constante ou la fonction $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}} : \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Proposition 14 (Opérations sur les fonctions périodiques)

Soit $T > 0$. On suppose que E est T-périodique. Soient $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions T-périodiques.

(i) Les fonctions $f + g$, fg sont aussi T-périodiques ainsi que $\dfrac{f}{g}$ si g ne s'annule pas.

(ii) Pour tout $\omega > 0$, la fonction $x \longmapsto f(\omega x)$ est $\dfrac{T}{\omega}$-périodique sur l'ensemble dilaté/contracté $\dfrac{1}{\omega}E$.

Démonstration

(i) Soit $x \in E$. On a
- $(f + g)(x + T) = f(x + T) + g(x + T) = f(x) + g(x) = (f + g)(x)$.
- $(fg)(x + T) = f(x + T)g(x + T) = f(x)g(x) = (fg)(x)$.
- Si g ne s'annule pas, $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x + T) = \dfrac{f(x + T)}{g(x + T)} = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$.

(ii) Soit $x \in \dfrac{1}{\omega}E$. Pour tout $\omega > 0$, $f\left(\omega\left(x + \dfrac{T}{\omega}\right)\right) = f(\omega x + T) = f(\omega x)$. ■

II) LIMITES, CONTINUITÉ, DÉRIVABILITÉ, CONVEXITÉ

Les résultats de cette section seront démontrés dans les chapitres « Limites et continuité » et « Dérivabilité et convexité ».

A - LIMITES

Proposition 15 (Composition des limites)

Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à E, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à F et $c \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors,

$$\begin{cases} \lim\limits_{a} f = b \\ \lim\limits_{b} g = c \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{a}(g \circ f) = c.$$

Exemple 16 $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \exp\left(-\dfrac{1}{x}\right) = 0.$

Démonstration

On applique la proposition précédente avec $f : x \longmapsto -\dfrac{1}{x}$ sur $E = \mathbb{R}_+^*$, $g = \exp$, $a = 0$ et $b = -\infty$. On a

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} -\frac{1}{x} = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{y \longrightarrow -\infty} \exp(y) = 0,$$

donc $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \exp\left(-\dfrac{1}{x}\right) = 0.$ ■

B - Continuité

Définition 17 (Fonction continue)

Soient $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in E$. On dit que f est **continue** en a si $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) = f(a)$.
On dit que f est **continue** sur E si f est continue en tout point de E.
L'ensemble des fonctions continues sur E est noté $\mathscr{C}(E, \mathbb{R})$.

On ne définit la continuité d'une fonction qu'en un point où elle est déjà définie.

f est continue en a $\implies$ définie en a $\qquad$ f est définie en a $\not\Longleftarrow$ continue en a

Proposition 18 (Opération sur les fonctions continues)

- **Combinaison linéaire, produit, quotient :** Pour toutes fonctions $f, g \in \mathscr{C}(E, \mathbb{R})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, les fonctions $\lambda f + \mu g$ et $f\,g$ sont continues sur E, ainsi que $\dfrac{f}{g}$ si g ne s'annule pas.
- **Composition :** Pour toutes fonctions $f \in \mathscr{C}(E, F)$ et $g \in \mathscr{C}(F, \mathbb{R})$, la fonction $g \circ f$ est continue sur E.
- **Réciproque :** Soient I et J deux INTERVALLES et $f \in \mathscr{C}(I, J)$ bijective de I sur J. Alors f^{-1} est continue sur J.

Exemple 19 Montrons que $f : x \longmapsto \sqrt{-x^2 + 3x + 4}$ est continue sur $[-1, 4]$.

Démonstration

Le polynôme $x \longmapsto -x^2 + 3x + 4$ est continu sur $[-1, 4]$ À VALEURS DANS $\mathbb{R}_+$ et la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. Donc, par composition de fonctions continues, f est continue sur $[-1, 4]$. ■

Théorème 20 (Théorème des valeurs intermédiaires)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction CONTINUE.
Tout réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$ possède au moins un antécédent par f dans $[a, b]$.
Par exemple, si $f(a) < f(b)$, le TVI s'écrit : $\quad \forall y \in [f(a), f(b)],\ \exists x \in [a, b],\ y = f(x)$.

Le TVI n'est pas seulement valable sur un segment : il s'applique plus généralement à tout intervalle. Il peut alors se formuler sous une forme générale particulièrement élégante.

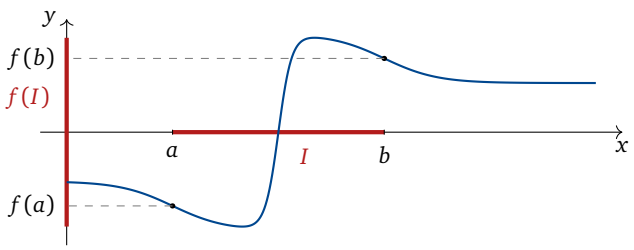
Théorème 21 (TVI sur un intervalle quelconque)

Soit $f \in \mathscr{C}(E, \mathbb{R})$. Pour tout intervalle $I \subset E$, $f(I)$ est aussi un intervalle.

La nature de l'intervalle $f(I)$ (ouvert, fermé, semi-ouvert) n'est pas nécessairement liée à celle de I. Un théorème que nous verrons dans l'année garantira toutefois que l'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

Autre point, supposons arbitrairement $f(a) \leqslant f(b)$. De manière générale, par continuité (en utilisant le TVI),

$[f(a), f(b)] \subset f([a, b])$ mais $f([a, b]) \not\supset [f(a), f(b)]$



L'intervalle $f(I)$ prend une forme particulièrement simple lorsque la fonction f est strictement monotone en plus d'être continue: ses bornes sont alors données par les images des bornes de I, et la nature de l'intervalle est d'une certaine façon conservée. Par exemple :

- Si f est strictement croissante, $\quad f([a, b[) = [f(a), f(b)[$.
- Si f est strictement décroissante, $\quad f([a, b[) =]f(b), f(a)]$.

Et lorsque la fonction n'est pas définie en b, le résultat reste vrai en remplaçant $f(b)$ par $\lim\limits_{b} f$. Est-ce que cette limite existe toujours ? Oui, grâce à la monotonie, mais nous le verrons dans le chapitre « Limites et continuité ».

Un autre point à comprendre, le TVI est un théorème d'**existence** dans lequel aucune hypothèse de monotonie n'est nécessaire. En revanche, la stricte monotonie implique l'injectivité et assure donc l'**unicité** d'un antécédent, sans qu'aucune hypothèse de continuité ne soit nécessaire.

TVI $\longrightarrow$ Existence Stricte monotonie $\longrightarrow$ Unicité

Lorsque les deux propriétés sont combinées, cela donne lieu à un théorème qui combine existence et unicité.

Théorème 22 (Théorème de la bijection)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$.

(i) Toute fonction f continue et strictement croissante sur $[a,b]$ est bijective de $[a,b]$ sur $[f(a), f(b)]$.

(ii) Toute fonction f continue et strictement décroissante sur $[a,b[$ est bijective de $[a,b[$ sur $]\lim_b f, f(a)]$.

(iii) Toute fonction f continue et strictement croissante sur $]a,b[$ est bijective de $]a,b[$ sur $]\lim_a f, \lim_b f[$.

Les autres variantes du théorème sont également vraies (en faisant varier le sens de variation, la définition en a et en b avec éventuellement $a = -\infty$ et $b = +\infty$).

Théorème de la bijection = TVI + Stricte monotonie = Existence + Unicité

Le TVI et le théorème de la bijection sont très utiles pour montrer qu'une fonction f possède un zéro, *i.e.* que l'équation $f(x) = 0$ possède une solution. L'idée est simple : si l'on trouve deux réels a et b tels que $f(a)$ et $f(b)$ soient de signes opposés, alors, dès que f est continue, le TVI garantit qu'elle s'annule entre a et b. Si f est en plus strictement monotone, ce zéro est unique.

Cette idée permet notamment d'étudier les points fixes d'une fonction f. En effet, chercher les x tels que $f(x) = x$ revient simplement à chercher les zéros de la fonction $x \longmapsto f(x) - x$. On peut donc appliquer les mêmes outils pour montrer l'existence et l'unicité d'un point fixe.

Exemple 23 La fonction $x \longmapsto e^{-x}$ possède un et un seul point fixe sur $\mathbb{R}$.

Démonstration

La fonction $f : x \longmapsto e^{-x} - x$ est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ par somme des fonctions $x \longmapsto e^{-x}$ et $x \longmapsto -x$ qui le sont. Par ailleurs, $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} -\infty$ et $f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} +\infty$, donc f s'annule une et une seule fois sur $\mathbb{R}$ d'après le théorème de la bijection. ■

C - Dérivabilité, dérivées successives

Définition 24 (Fonction dérivable)

Soient $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in E$. On dit que f est

- **dérivable** en a si la limite $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe et est finie. On la note alors $f'(a)$ ou $\dfrac{df}{dx}(a)$.
- **dérivable** sur E si f est dérivable en tout point de E. La fonction f' est alors appelée la **dérivée** de f. L'ensemble des fonctions dérivables sur E est noté $\mathscr{D}(E, \mathbb{R})$.

On préfère généralement ramener l'étude des limites en un point quelconque à celle d'une limite en 0. On considère ainsi le taux d'accroissement suivant lorsque h tend vers 0 : $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Définition 25 (Tangente)

Pour tout $a \in E$ en lequel f est dérivable, on appelle **tangente** de f en a la droite d'équation : $y = f(a) + f'(a)(x - a)$.

La tangente de f en a est la droite qui approxime le mieux le graphe de f au voisinage de a. Pour le comprendre, voici deux façons de voir les choses :

- Géométriquement, une droite non verticale passant par le point $(a, f(a))$ a pour équation $y = f(a) + \alpha(x - a)$ avec α son coefficient directeur. La quantité $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ représente le coefficient de la corde reliant les points $(x, f(x))$ et $(a, f(a))$. En passant à la limite, $f'(a)$ représente donc la pente limite des cordes, donc la pente de la tangente.
- Algébriquement, si f est dérivable en a, alors $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \approx f'(a)$ lorsque x est proche de a, donc $f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$. Ce petit raisonnement sera rendu rigoureux dans le chapitre « Analyse Asymptotique ».

⚠ La notation $f(x)'$ est strictement interdite. On n'écrira donc pas $\left(\frac{x^2+1}{x-1}\right)'$ mais $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x^2+1}{x-1}\right)$, ou bien on définira $f : x \longmapsto \frac{x^2+1}{x-1}$ pour pouvoir noter $f'(x)$, ce qui précise par rapport à quelle variable on dérive.

Proposition 26 (Dérivable implique continue)

Soient $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in E$. Si f est dérivable en a alors f est continue en a.

Démonstration

Si f est dérivable en a, alors $f(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a) + f(a) \xrightarrow[x\longrightarrow a]{} f'(a) \times 0 + f(a) = f(a)$. ■

⚠ La réciproque est évidemment fausse. Par exemple la fonction $x \longmapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$ mais n'est dérivable que sur $\mathbb{R}^*$, ou encore, la fonction $\sqrt{\cdot}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ mais n'est dérivable que sur $\mathbb{R}_+^*$.

Définition 27 (Dérivées successives)

Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$. On pose $f^{(0)} = f$. Ensuite, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, si on a réussi à définir $f^{(k-1)}$ sur E et si elle est dérivable sur E, on dit que f est k-fois dérivable et on pose $f^{(k)} = \left(f^{(k-1)}\right)'$. Pour $k \in \{1,2,3\}$, on note plutôt f', f'' et f'''.

La fonction $f^{(k)}$ est appelée la **dérivée** $k^{\text{ème}}$ de f. On notera $\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}(f(x))$ plutôt que $(f(x))^{(k)}$.

Exemple 28 Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $f : x \longmapsto x^n$ est indéfiniment dérivable et pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$:

$$f^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k} \quad \text{si } k \leqslant n, \qquad \text{et} \qquad f^{(k)}(x) = 0 \quad \text{si } k > n.$$

Définition 29 (Fonction de classe $\mathscr{C}^n$, de classe $\mathscr{C}^\infty$)

Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- **Classe $\mathscr{C}^n$:** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on dit que f est **de classe $\mathscr{C}^n$ sur** E si f est n fois dérivable et $f^{(n)}$ est continue sur E. On note $\mathscr{C}^n(E,\mathbb{R})$ l'ensemble de ces fonctions.
- **Classe $\mathscr{C}^\infty$:** On dit que f est **de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur** E si f est indéfiniment dérivable. On note $\mathscr{C}^\infty(E,\mathbb{R})$ l'ensemble de ces fonctions.

Proposition 30 (Opérations sur les fonctions dérivables)

- **Combinaison linéaire, produit, quotient :** Pour toutes fonctions $f, g \in \mathscr{D}(E,\mathbb{R})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, les fonctions $\lambda f + \mu g$ et fg sont dérivables sur E, ainsi que f/g si g ne s'annule pas. Leurs dérivées vérifient :
$$(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g', \quad (fg)' = f'g + fg', \quad \text{et} \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$
- **Composition :** Soient $f \in \mathscr{D}(E,F)$ et $g \in \mathscr{D}(F,\mathbb{R})$. Alors $g \circ f$ est dérivable sur E et $(g \circ f)' = f' \times \left(g' \circ f\right)$.
- **Réciproque :** Soient I et J deux INTERVALLES et $f \in \mathscr{D}(I,J)$ bijective de I sur J. Si f' ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} est dérivable sur J et $\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

Ces résultats (pas les formules) restent vrais en remplaçant « dérivable » par « k fois dérivable ».

Démonstration

Les résultats seront démontrés dans le chapitre « Dérivabilité et convexité ».

En supposant qu'on ait démontré la dérivabilité de f^{-1}, on peut retrouver la formule de la dérivée de f^{-1} en dérivant l'égalité : $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}$. ■

Cette proposition permet de démontrer rapidement la dérivabilité, voire davantage, d'une fonction sur un ensemble où cette propriété est immédiate. La rédaction est similaire à celle de la continuité vue précédemment. En revanche, ces théorèmes ne permettent PAS de déduire la non continuité ou non dérivabilité d'une fonction.

Exemple 31 La fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x^2-3x+2}$ est dérivable sur $]-\infty,1[\cup]2,+\infty[$.

Démonstration

La fonction polynomiale $x \longmapsto x^2-3x+2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, tandis que la fonction racine carrée est dérivable sur $]0,+\infty[$. Par composition, f est donc dérivable en tout x tel que $x^2-3x+2>0$, c'est-à-dire pour $x \in]-\infty,1[\cup]2,+\infty[$.
Pour étudier la dérivabilité en 1 et 2, il faudrait revenir à la définition, c'est-à-dire au taux d'accroissement. ■

Proposition 32 (Caractérisation des fonctions dérivables constantes/monotones)

Soient I un INTERVALLE et $f \in \mathscr{D}(I,\mathbb{R})$.

- **Constance :** f est constante sur I si et seulement si f' est nulle sur I.
- **Monotonie :** f est croissante sur I si et seulement si f' est positive sur I.
- **Monotonie stricte :** f est strictement croissante sur I si et seulement si f' est positive sur I et n'est identiquement nulle sur aucun intervalle $[a,b]\subset I$ avec $a<b$. En particulier, si f' est strictement positive sur I, ou ne s'y annule qu'en un nombre fini de points, f est strictement croissante.

En considérant $-f$ à la place de f, on peut obtenir des résultats en fonction de la décroissance de la fonction f.

⚠ C'est très important que I soit un **INTERVALLE**. Par exemple,

- La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ a une dérivée sur son ensemble de définition mais n'est pas décroissante.
- Posons $E=[0,1]\cup[2,3]$. La fonction $f : \begin{cases} E & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x\in[0,1] \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$ est dérivable sur son ensemble de définition telle que $\forall x\in E,\quad f'(x)=0$ et pourtant f n'est pas constante.

Ce sont ces propositions qui justifient la construction des tableaux de variations dans les études de fonction.

Exemple 33 Montrons que $\forall x\in[0,1],\ 2\sqrt{2}-2\leqslant\dfrac{x^2+1}{x+1}\leqslant 1$.

Démonstration

- **Avec un encadrement naïf.** Pour $x\in[0,1]$, $0\leqslant x^2\leqslant 1$ et $1\leqslant x+1\leqslant 2$. Comme les quantités sont positives, $1\leqslant x^2+1\leqslant 2$ donc $\dfrac{1}{2}\leqslant\dfrac{x^2+1}{x+1}\leqslant 2$. Cet encadrement est cependant assez grossier.
- **Avec une étude de fonction.**
  La fonction $f : x\longmapsto\dfrac{x^2+1}{x+1}$ est dérivable sur $[0,1]$ car $x+1$ ne s'y annule pas.
  De plus, pour tout $x\in[0,1]$, $f'(x)=\dfrac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}$.
  Sur $[0,1]$, le dénominateur est strictement positif. Le signe de f' est donc celui de x^2+2x-1, qui s'annule en $x=\sqrt{2}-1$. D'après le tableau de variation, on obtient finalement $2\sqrt{2}-2\leqslant\dfrac{x^2+1}{x+1}\leqslant 1$.

x	0		$\sqrt{2}-1$		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	↘	$2\sqrt{2}-2$	↗	1

■

Exemple 34 Montrons que, pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*\setminus\{1\}$, $\dfrac{x+1}{x-1}\ln x\geq 2$.

Démonstration

Au lieu d'étudier directement la fonction $x\longmapsto\dfrac{x+1}{x-1}\ln(x)$, ou même $x\longmapsto\dfrac{x+1}{x-1}\ln(x)-2$, on étudie plutôt $f : x\longmapsto(x+1)\ln(x)-2(x-1)$. Les fractions en moins simplifient largement les calculs.

La fonction f est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ et, pour tout $x>0$, $f'(x)=\ln(x)-1+\dfrac{1}{x}$ et $f''(x)=\dfrac{x-1}{x^2}$. Ainsi, f' est décroissante sur $]0,1]$ et croissante sur $[1,+\infty[$. Comme $f'(1)=0$, on a $f'\geq 0$ sur $]0,+\infty[$.
D'après le tableau de variations, $f(x)\geq 0$ pour tout $x\geq 1$ et $f(x)\leqslant 0$ pour tout $x\in]0,1]$. En divisant par $x-1$, strictement positif sur $]1,+\infty[$ et strictement négatif sur $]0,1[$, on obtient dans les deux cas $\dfrac{x+1}{x-1}\ln(x)\geq 2$.

x	0		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

■

Exemple 35 Montrons que pour tous $x,y\in]-1,1[$, $\dfrac{x+y}{1+xy}\in]-1,1[$.

Démonstration

Pour étudier une inégalité à deux variables, on en fixe une : soit $y\in]-1,1[$, posons $f:x\longmapsto\dfrac{x+y}{1+xy}$.
La fonction f est dérivable sur $]-1,1[$ car $1+xy>0$ (puisque $|xy|<1$). De plus, pour tout $x\in]-1,1[$, $f'(x)=\dfrac{1-y^2}{(1+xy)^2}>0$.
La fonction f est donc strictement croissante sur $]-1,1[$. D'après le tableau de variation, on en déduit que $-1<f(x)<1$, soit finalement $-1<\dfrac{x+y}{1+xy}<1$.

x	-1		1
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	1

■

D - Convexité/concavité

Proposition 36 (Segment version barycentre)

Pour tout $x,y\in\mathbb{R}$ avec $x<y$, on a : $[x,y]=\{x+\lambda(y-x)\}_{\lambda\in[0,1]}=\{(1-\lambda)x+\lambda y\}_{\lambda\in[0,1]}$.

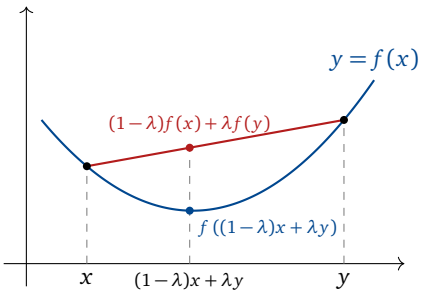
Définition 37 (Corde)

Soient $f:E\longrightarrow\mathbb{R}$ et $x,y\in E$ avec $x<y$. On appelle **corde** de f entre x et y le segment qui relie $(x,f(x))$ à $(y,f(y))$, c'est-à-dire l'ensemble $\{((1-\lambda)x+\lambda y,(1-\lambda)f(x)+\lambda f(y))\}_{\lambda\in[0,1]}$.

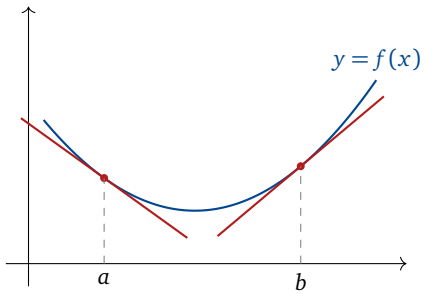
Définition 38 (Fonction convexe/concave)

Soient I un intervalle et $f:I\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction.

- **Fonction convexe :** On dit que f est **convexe** si son graphe est en dessous de toutes ses cordes :
$$\forall x,y\in I,\ \forall\lambda\in[0,1],\ f((1-\lambda)x+\lambda y)\leqslant(1-\lambda)f(x)+\lambda f(y).$$
- **Fonction concave :** On dit que f est **concave** si $-f$ est convexe, *i.e.* si son graphe est au-dessus de ses cordes.



Sous ses cordes



Au-dessus de ses tangentes

Exemple 39 La fonction $|\cdot|$ est convexe.

Démonstration

En utilisant l'inégalité triangulaire : $\big|(1-\lambda)x+\lambda y\big|\leqslant|1-\lambda||x|+|\lambda||y|=(1-\lambda)|x|+\lambda|y|$. ■

Théorème 40 (Caractérisation des fonctions convexes)

Soient I un intervalle et $f \in \mathscr{D}(I,\mathbb{R})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f est convexe sur I.

(ii) f' est croissante sur I.

(iii) Le graphe de f est au-dessus de toutes ses tangentes.

Si f est deux fois dérivable, l'assertion (ii) peut être remplacée par : $f'' \geq 0$.

En remplaçant f par $-f$ on obtient un résultat analogue pour les fonctions concaves.

Démonstration

Le résultat sera démontré dans le chapitre « Dérivabilité et convexité ». ■

Exemple 41 Pour tout $x > 0$: $\sqrt{x} \leqslant \dfrac{x+1}{2}$.

Démonstration

La fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$ car sa dérivée $x \longmapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ est décroissante. Son graphe est situé sous sa tangente en 1, d'équation $y = \dfrac{x+1}{2}$. ■

Définition 42 (Point d'inflexion)

Soient I un intervalle, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$ un point qui n'est pas une borne de I.

On dit que f possède un **point d'inflexion** en a si f est convexe au voisinage de a à gauche et concave au voisinage de a à droite — ou l'inverse.

Si f est deux fois dérivable sur I, f possède un point d'inflexion en a si et seulement si f'' s'annule en a et est positive au voisinage de a à gauche et négative au voisinage de a à droite — ou l'inverse.

Exemple 43 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction puissance $x \longmapsto x^{2n+1}$ possède un et un seul point d'inflexion, à savoir 0, car sa dérivée seconde $x \longmapsto 2n(2n+1)x^{2n-1}$ s'annule en changeant de signe en 0 et ne le fait nulle part ailleurs.

Exemple 44 Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $b, c, d \in \mathbb{R}$. La fonction $x \longmapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$ possède un et un seul point d'inflexion, à savoir $-\dfrac{b}{3a}$, car sa dérivée seconde $x \longmapsto 6ax + 2b$ s'annule en changeant de signe en $-\dfrac{b}{3a}$ et ne le fait nulle part ailleurs.

III) Fonctions usuelles

A - Fonctions polynomiales

Proposition 45 (Fonction affine)

Soit f une fonction affine. La fonction f est indéfiniment dérivable et est égale à sa tangente en tout point, ainsi :

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\quad f(x) = f'(a)(x-a) + f(a).$$

Pour connaître une fonction affine il faut, au choix, connaître deux points de la courbe, connaître son coefficient directeur et sa valeur en 0, connaître sa dérivée et n'importe quel point de la courbe.

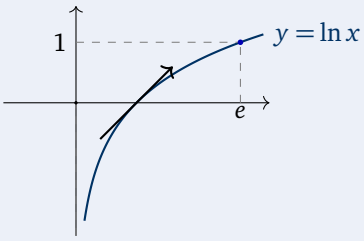
Proposition 46 (Dérivée des fonctions puissances entières)

Soit $n \in \mathbb{Z}$, la fonction $x \longmapsto x^n$ est indéfiniment dérivable sur $\begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } n \geq 0 \\ \mathbb{R}^* & \text{sinon} \end{cases}$ et sa dérivée est la fonction $x \longmapsto nx^{n-1}$.

B - Fonction logarithmique et exponentielle

Théorème 47 (Fonction logarithme)

- **Définition et régularité :** La fonction **logarithme** est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $\begin{cases}\ln(1)=0\\ \forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ \ln'(x)=\dfrac{1}{x}.\end{cases}$
  Elle est également strictement croissante et concave sur $\mathbb{R}_+^*$, avec $\lim\limits_{x\to 0}\ln x=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$.
  En particulier, $\begin{cases}\forall x>0,\quad \ln(x)\leqslant x-1\\ \forall x>-1,\quad \ln(1+x)\leqslant x.\end{cases}$
- **Comportement au voisinage de 1 :** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1.$
- **Transformations de produits en sommes :** Pour tout $x,y\in\mathbb{R}_+^*$,
$$\ln(xy)=\ln(x)+\ln(y)\quad\text{et}\quad\ln\frac{1}{x}=-\ln x.$$
- **Croissances comparées en $+\infty$ et 0 :** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to 0}x\ln x=0.$



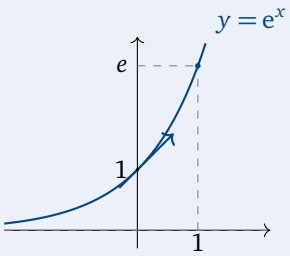
Démonstration

Nous démontrons ces résultats en admettant le théorème fondamental de l'analyse, selon lequel toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives, et qu'il existe une unique primitive s'annulant en un point donné.
On définit alors ln comme l'unique primitive de $x\longmapsto\dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ qui s'annule en 1.

- **Régularité, variations et concavité :** La fonction $x\longmapsto\dfrac{1}{x}$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, donc sa primitive ln aussi. Sa dérivée est positive et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc ln est croissante et concave sur $\mathbb{R}_+^*$. Sa courbe est donc située en dessous de chacune de ses tangentes. En particulier, la tangente au point d'abscisse 1 a pour équation $y=x-1$.
  On a donc, pour tout $x>0$, $\ln x\leqslant x-1$, et donc pour tout $x>-1$, $\ln(x+1)\leqslant x$.
- **Comportement au voisinage de 1 :** La quantité $\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ n'est rien d'autre que le taux d'accroissement de $x\longmapsto\ln(1+x)$ en 0, ainsi, sa limite vaut $\dfrac{1}{1+0}=1$.
- **Transformation des produits en somme :** Soit $y>0$ fixé. Notons $\varphi:x\longmapsto\ln(xy)-\ln(x)-\ln(y)$.
  La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x>0$: $\varphi'(x)=\dfrac{y}{xy}-\dfrac{1}{x}=0$. Comme φ' est nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$, φ y est constante de valeur $\varphi(1)=0$. On en déduit la formule $\ln(xy)=\ln(x)+\ln(y)$.
  En particulier, $\ln\dfrac{1}{x}+\ln x=\ln(1)=0$.
- **Croissances comparées :**
  - Pour tout $x\geq 1$, $\ln(x)=\ln(\sqrt{x}^2)=2\ln(\sqrt{x})\leqslant 2(\sqrt{x}-1)\leqslant 2\sqrt{x}$.
    Donc, $0\leqslant\dfrac{\ln(x)}{x}\leqslant\dfrac{2}{\sqrt{x}}$. D'où $\dfrac{\ln x}{x}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$ par encadrement.
  - Posons $t=\dfrac{1}{x}$, on a alors $x\ln x=-\dfrac{\ln t}{t}\xrightarrow[t\to+\infty]{}0$ d'après le point précédent. Or, $\dfrac{1}{x}\xrightarrow[x\to 0+]{}+\infty$ d'où $x\ln x\xrightarrow[x\to 0]{}0$ par composition des limites.
- **Limites en 0 et $+\infty$:** Nous admettons le théorème de la limite monotone pour les fonctions, analogue de celui sur les suites que vous connaissez. D'après le théorème de la limite monotone, toute fonction croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ possède une limite en $+\infty$. En particulier, notons $\ell\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ celle de ln. Supposons par l'absurde que $\ell\in\mathbb{R}$. Fixons $x\in\mathbb{R}_+^*$ et faisons tendre y vers $+\infty$ dans l'égalité $\ln(xy)=\ln(x)+\ln(y)$. Il vient alors : $\ell=\ln(x)+\ell$ d'où $\ln(x)=0$, et ce, pour tout $x>0$. C'est contradictoire avec la stricte croissance du ln, et donc $\ell=+\infty$. La limite en 0^+ se déduit via la formule $\ln\dfrac{1}{x}=-\ln x$. ■

Théorème 48 (Fonction exponentielle)

- **Définition :** La fonction ln est bijective de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$. On appelle **fonction exponentielle** et on note exp sa réciproque. En particulier, $\exp(0)=1$, on note $e=\exp(1)$ et les graphes des fonctions exp et ln sont symétriques l'un de l'autre par rapport à la droite d'équation $y=x$.
  Pour tout $x\in\mathbb{R}$: $\ln(\exp(x))=x$ et pour tout $x>0$, $\exp(\ln x)=x$.
- **Régularité :** exp est indéfiniment dérivable et convexe sur $\mathbb{R}$ avec $\exp'=\exp$. En particulier, $\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ e^x\geq 1+x.}$
- **Transformations de sommes en produits :** Pour tout $x,y\in\mathbb{R}$,
$$\exp(x+y)=\exp(x)\exp(y) \quad \text{et} \quad \exp(-x)=\frac{1}{\exp(x)}.$$
- **Croissances comparées en $+\infty$:** $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\dfrac{x}{\exp(x)}=0.$
- **Comportement au voisinage de 0 :** $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{\exp(x)-1}{x}=1.$



C - Fonctions puissances

Nous avons jusqu'ici défini une puissance ENTIÈRE de tout réel $x\in\mathbb{R}$. Nous généralisons, sur $\mathbb{R}_+^*$, la notion de puissance en autorisant n'importe quelle puissance réelle.

Définition 49 (Puissance quelconque d'un réel strictement positif)

Soit $x>0$.

- **Puissance quelconque :** Pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$, on appelle x **puissance** α le réel $x^\alpha=\exp(\alpha\ln x)$. En particulier, puisque $\ln e=1$, on a $e^\alpha=\exp(\alpha)$.
- **Racine $n^{\text{ème}}$:** Pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$, on appelle **racine $n^{\text{ème}}$** de x le réel $\sqrt[n]{x}=x^{\frac{1}{n}}$.

Pour $n\in\mathbb{N}$ et $x>0$, on a $\exp(n\ln x)=\exp(\ln x^n)=x^n$ donc cette définition est cohérente avec la définition classique d'une puissance entière.

Proposition 50 (Propriétés algébriques des puissances)

Pour tous $x,y\in\mathbb{R}_+^*$ et $a,b\in\mathbb{R}$:
$$\ln(x^a)=a\ln x,\quad x^{a+b}=x^a x^b,\quad x^{ab}=(x^a)^b,\quad (xy)^a=x^a y^a \quad \text{et} \quad x^{-a}=\frac{1}{x^a}=\left(\frac{1}{x}\right)^a$$

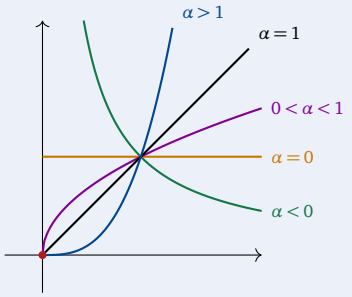
Proposition 51 (Propriétés analytiques des fonctions puissances)

Soient $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

(i) **Régularité :** La fonction $x\longmapsto x^\alpha$ est définie et indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée $x\longmapsto \alpha x^{\alpha-1}$. Elle est concave si $\alpha\in[0,1]$ et convexe sinon.

(ii) **Positions relatives :**
- Pour tout $x\in\,]0,1]$: $\alpha\leqslant\beta\Longrightarrow x^\beta\leqslant x^\alpha$.
- Pour tout $x\in[1,+\infty[$: $\alpha\leqslant\beta\Longrightarrow x^\alpha\leqslant x^\beta$.

(iii) **Prolongement par continuité en 0 lorsque $\alpha>0$:** Si $\alpha>0$, on prolonge la fonction x^α en 0 en posant $0^\alpha=0$. La fonction prolongée ainsi obtenue est donc définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.



Proposition 52 (Croissances comparées)

Soient $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$ et $\beta\in\mathbb{R}$. On a : $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\dfrac{x^\beta}{e^x}=0$, $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\dfrac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha}=0$ et $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}x^\alpha|\ln x|^\beta=0$

D - Fonctions hyperboliques

Définition 53 (Fonctions cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique)

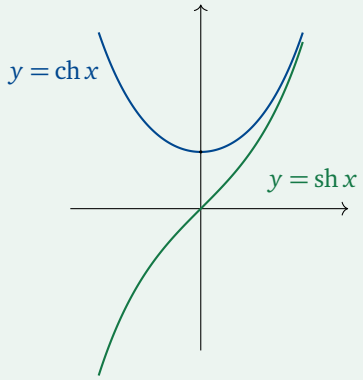
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on appelle

- **cosinus hyperbolique** de x le réel : $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$,
- **sinus hyperbolique** de x le réel : $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$.

Les fonctions ch et sh, respectivement paire et impaire, sont définies et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ avec : $\operatorname{ch}' = \operatorname{sh}$ et $\operatorname{sh}' = \operatorname{ch}$.

La fonction ch est convexe. La fonction sh est concave sur $\mathbb{R}_-$ et convexe sur $\mathbb{R}_+$ avec un point d'inflexion en 0.



Démonstration

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = (\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)(\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x) = e^x e^{-x} = 1$. ■

Exemple 54 L'équation $\operatorname{ch} x = 2$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ possède deux solutions qu'on sait calculer explicitement.

Démonstration

Les équations $\operatorname{ch} x = y$ et $\operatorname{sh} x = y$ d'inconnue x à y fixé se ramènent aisément à des équations du second degré.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

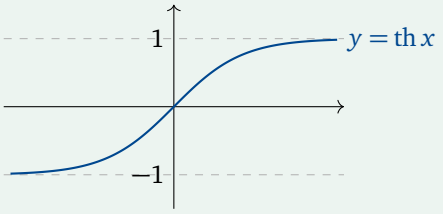
$$\begin{aligned}
\operatorname{ch} x = 2 &\iff e^x + e^{-x} - 4 = 0 \\
&\iff (e^x)^2 - 4e^x + 1 = 0 \\
&\iff e^x = 2 + \sqrt{3} \quad \text{ou} \quad e^x = 2 - \sqrt{3} \\
&\underset{2-\sqrt{3}>0}{\overset{2+\sqrt{3}>0}{\iff}} x = \ln(2+\sqrt{3}) \quad \text{ou} \quad x = \ln(2-\sqrt{3}).
\end{aligned}$$

■

Définition 55 (Fonction tangente hyperbolique)

La fonction **tangente hyperbolique** $\operatorname{th} = \dfrac{\operatorname{sh}}{\operatorname{ch}}$ est définie sur $\mathbb{R}$.
Elle est impaire et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et : $\operatorname{th}' = 1 - \operatorname{th}^2 = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2}$.
Elle est convexe sur $\mathbb{R}_-$ et concave sur $\mathbb{R}_+$ avec un point d'inflexion en 0.

Elle possède enfin une asymptote d'équation $y = 1$ au voisinage de $+\infty$ (resp. $y = -1$ au voisinage de $-\infty$).



Démonstration

La fonction th est de classe $\mathscr{C}^\infty$ par quotient et :

$$\operatorname{th}' = \frac{\operatorname{sh}' \operatorname{ch} - \operatorname{ch}' \operatorname{sh}}{\operatorname{ch}^2} = \frac{\operatorname{ch}^2 - \operatorname{sh}^2}{\operatorname{ch}^2},$$

quantité qui vaut à la fois $\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2}$ et $1 - \dfrac{\operatorname{sh}^2}{\operatorname{ch}^2} = 1 - \operatorname{th}^2$.
La stricte croissance en découle. En outre, par composition, la dérivée $\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2}$ est croissante sur $\mathbb{R}_-$ et décroissante sur $\mathbb{R}_+$, donc th est convexe sur $\mathbb{R}_-$ et concave sur $\mathbb{R}_+$.
Pour la limite en $+\infty$: $\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$. ■

Proposition 56 (Quelques taux d'accroissements)

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{ch}(x) - 1}{x} = 0$.
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sh}(x)}{x} = 1$.
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{th}(x)}{x} = 1$.

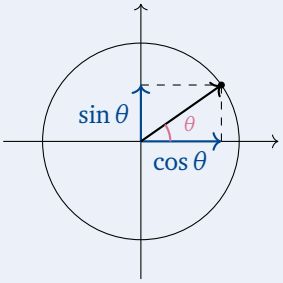
IV) Fonctions trigonométriques

A - Sinus, cosinus et tangente

N'ayant pas les outils nécessaires pour proprement définir les fonctions cosinus et sinus, nous admettons leur existence.

Proposition 57 (Sinus, cosinus et cercle trigonométrique)

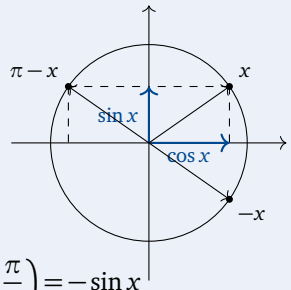
On rappelle que l'équation $x^2+y^2=1$ a pour solution exactement le cercle trigonométrique.



(i) **Cercle trigonométrique :**

- Pour tout $\theta\in\mathbb{R}$, $\quad\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$.
- Pour tous $x,y\in\mathbb{R}$ tels que $x^2+y^2=1$, il existe $\theta\in\mathbb{R}$ tel que $(x,y)=(\cos\theta,\sin\theta)$. Un tel θ est unique modulo 2π.

(ii) **Résolution d'équations :** Pour tous $x,y\in\mathbb{R}$,



$$\cos x=\cos y \iff x\equiv y\ [2\pi] \quad\text{ou}\quad x\equiv -y\ [2\pi]$$
$$\sin x=\sin y \iff x\equiv y\ [2\pi] \quad\text{ou}\quad x\equiv \pi-y\ [2\pi]$$

(iii) **Transformations affines :**

$\cos(x+\pi)=-\cos x$	$\cos(\pi-x)=-\cos x$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$	$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x$
$\sin(x+\pi)=-\sin x$	$\sin(\pi-x)=\sin x$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$	$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x$

Exemple 58 Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\sin(2x)=\frac{1}{2}\iff\left(x\equiv\frac{\pi}{12}\ [\pi]\ \text{ou}\ x\equiv\frac{5\pi}{12}\ [\pi]\right)$.

Démonstration

Pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\sin(2x)=\frac{1}{2} &\iff \sin(2x)=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\\ &\iff 2x\equiv\frac{\pi}{6}\ [2\pi]\ \text{ou}\ 2x\equiv\frac{5\pi}{6}\ [2\pi]\\ &\iff x\equiv\frac{\pi}{12}\ [\pi]\ \text{ou}\ x\equiv\frac{5\pi}{12}\ [\pi]\end{aligned}$$

■

Exemple 59 Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\sin x=\cos x\iff x\equiv\frac{\pi}{4}\ [\pi]$.

Démonstration

On a

$$\begin{aligned}\sin x=\cos x &\iff \sin x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\\ &\iff x\equiv x+\frac{\pi}{2}\ [2\pi] \quad\text{ou}\quad x\equiv\frac{\pi}{2}-x\ [2\pi]\\ &\iff \underbrace{0\equiv\frac{\pi}{2}\ [2\pi]}_{\text{faux}} \quad\text{ou}\quad 2x\equiv\frac{\pi}{2}\ [2\pi]\\ &\iff x\equiv\frac{\pi}{4}\ [\pi]\end{aligned}$$

■

Exemple 60 Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\cos x<1/2\iff x\in\left]\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right[+2\pi\mathbb{Z}\iff x\in\left]-\pi,\frac{-\pi}{3}\right[\cup\left]\frac{\pi}{3},\pi\right]+2\pi\mathbb{Z}$.

Les formules suivantes sont à connaître PAR CŒUR.

Proposition 61 (Formules de cosinus et sinus)

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

(i) **Formules d'addition**

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \qquad \sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \qquad \cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

(ii) **Formules de duplication**

$$\sin(2x) = 2\sin x \cos x \qquad \text{et} \qquad \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

(iii) **Formules de linéarisation**

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2} \qquad \text{et} \qquad \cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$

Les formules suivantes sont à retrouver RAPIDEMENT.

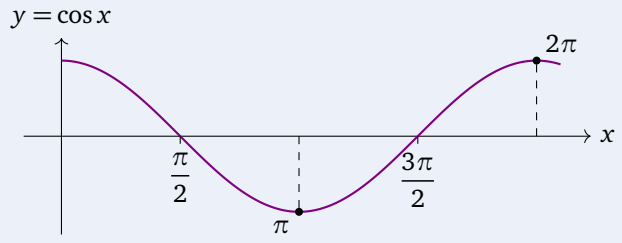
Proposition 62 (Formules de multiplications)

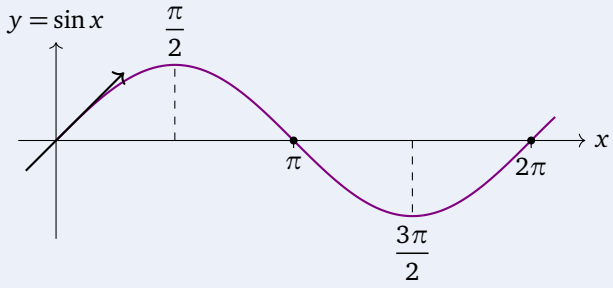
Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$$
$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$
$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

Proposition 63 (Propriétés fonctionnelles)

- **Sinus :** La fonction sin est impaire, 2π-périodique, indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\sin' = \cos$.
- **Cosinus :** La fonction cos est paire, 2π-périodique, indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\cos' = -\sin$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin x| \leqslant |x|$ et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.



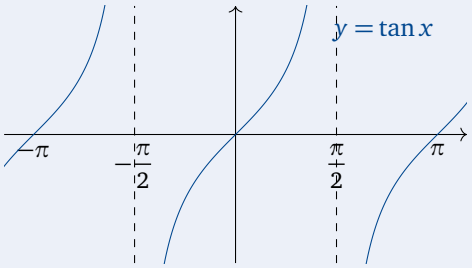


Démonstration

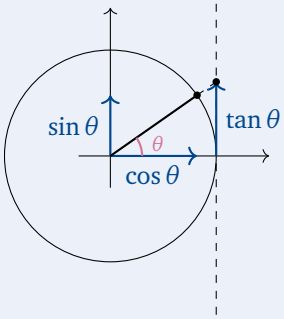
- La fonction sin est concave $[0, \pi]$ car cos y est décroissante, donc pour tout $x \in [0, \pi]$:
$$|\sin x| = \sin x \leqslant \sin'(0)x + 0 = x.$$
De plus, pour $x \in [-\pi, 0]$, $|\sin x| = \sin(-x) \leqslant -x = |x|$. Enfin, l'inégalité est triviale pour $|x| > \pi$.
- Pour $x \neq 0$, $\dfrac{\sin x}{x} = \dfrac{\sin x - \sin 0}{x - 0} \xrightarrow[x \to 0]{} \sin'(0) = \cos(0) = 1$. ■

B - Tangente

Proposition 64 (Tangente)



- **Définition et régularité :** On appelle **fonction tangente** la fonction $\tan = \dfrac{\sin}{\cos}$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[+ \pi\mathbb{Z}$.
  tan est impaire, π-périodique, de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur son ensemble de définition et : $\tan' = 1 + \tan^2 = \dfrac{1}{\cos^2}$.
- **Résolution d'équations :** Pour tous $x, y \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[+ \pi\mathbb{Z}$:
$$\tan x = \tan y \iff x \equiv y \ [\pi].$$
- **Formules d'addition et de duplication :** Dès que chaque terme est bien défini :
$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}, \quad \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y},$$
$$\tan(2x) = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}.$$



- **Expression de $\cos x$, $\sin x$ et $\tan x$ en fonction de $\tan\dfrac{x}{2}$:**
  Pour tout $x \in \left]-\pi, \pi\right[+ 2\pi\mathbb{Z}$, si on pose $t = \tan\dfrac{x}{2}$:
$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \text{et} \qquad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}.$$

Démonstration

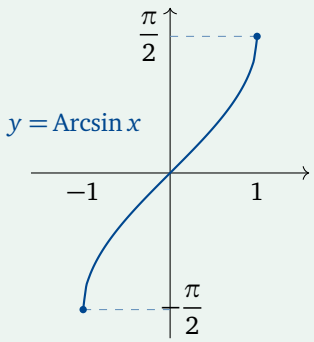
- **Définition et régularité :** La tangente est définie et $\mathscr{C}^\infty$ là où le cosinus ne s'annule pas, *i.e.* sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[+ \pi\mathbb{Z}$. De plus,
$$\tan' = \frac{\sin' \times \cos - \sin \times \cos'}{\cos^2} = \frac{\cos^2 + \sin^2}{\cos^2}, \qquad \text{donc} \quad \tan' = \frac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2.$$
- **Imparité :** Pour tout $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[+ \pi\mathbb{Z}$: $\tan(-x) = \dfrac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \dfrac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$.
- **Périodicité :** Pour tout $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[+ \pi\mathbb{Z}$: $\tan(x+\pi) = \dfrac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \dfrac{-\sin x}{-\cos x} = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \tan x$.
- **Variations et limites :** Par imparité et π-périodicité, une étude sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ suffit. La tangente y est strictement croissante car $\tan' = \dfrac{1}{\cos^2} > 0$. Enfin, $\sin x \xrightarrow[x \to \frac{\pi}{2}^-]{} 1$ et $\cos x \xrightarrow[x \to \frac{\pi}{2}^-]{} 0^+$, donc $\tan x \xrightarrow[x \to \frac{\pi}{2}^-]{} +\infty$.
- **Équation $\tan x = \tan y$:**
$$\tan x = \tan y \iff \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin y}{\cos y} \iff \sin x \cos y - \cos x \sin y = 0$$
$$\iff \sin(x-y) = 0 \iff x - y \equiv 0 \ [2\pi] \text{ ou } y - x \equiv \pi \ [2\pi] \iff x \equiv y \ [\pi].$$
  La propriété pouvait aussi être obtenue en remarquant que la fonction tangente est strictement croissante sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, donc injective sur ce même ensemble, ainsi que π-périodique.
- **Formule $\tan(x+y)$:**
$$\tan(x+y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y} = \frac{\cos x \cos y \left(\dfrac{\sin x}{\cos x} + \dfrac{\sin y}{\cos y}\right)}{\cos x \cos y \left(1 - \dfrac{\sin x}{\cos x} \times \dfrac{\sin y}{\cos y}\right)} = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}.$$
- **Expressions en fonction de $t = \tan\dfrac{x}{2}$:** D'abord : $\tan x = \tan\left(2 \times \dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{t+t}{1-t^2} = \dfrac{2t}{1-t^2}$,
$$\text{ensuite :} \quad \sin x = \sin\left(2 \times \frac{x}{2}\right) = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = \frac{2\tan\dfrac{x}{2}}{1 + \tan^2\dfrac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$
$$\text{et enfin :} \quad \cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 = \frac{2}{1 + \tan^2\dfrac{x}{2}} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$ ■

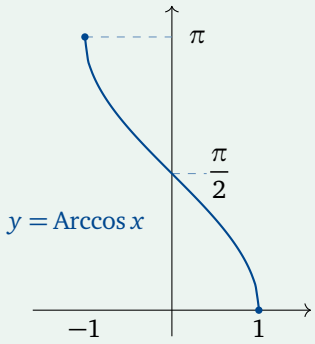
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	Non défini

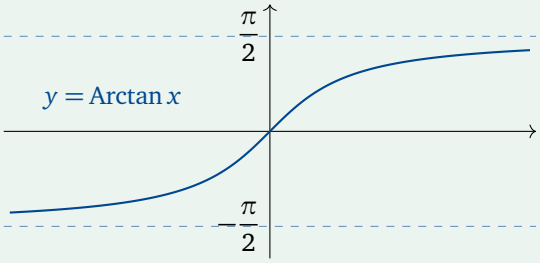
C - Arcsinus, arccosinus et arctangente

Définition 65 (Fonctions arccosinus, arcsinus et arctangente)

- **Arcsinus :** $\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$ est bijective de $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1,1]$ et sa réciproque **arcsinus** est notée Arcsin.
  Pour tout $x\in[-1,1]$, $\operatorname{Arcsin} x$ est l'unique réel θ de $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ pour lequel $\sin\theta = x$.
- **Arccosinus :** $\cos|_{[0,\pi]}$ est bijective de $[0,\pi]$ sur $[-1,1]$ et sa réciproque **arccosinus** est notée Arccos.
  Pour tout $x\in[-1,1]$, $\operatorname{Arccos} x$ est l'unique réel θ de $[0,\pi]$ pour lequel $\cos\theta = x$.
- **Arctangente :** $\tan|_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}$ est bijective de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$ et sa réciproque **arctangente** est notée Arctan.
  Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\operatorname{Arctan} x$ est l'unique réel θ de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ pour lequel $\tan\theta = x$.







x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\operatorname{Arcsin} x$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\operatorname{Arccos} x$	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$\operatorname{Arctan} x$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

Proposition 66 (Relations fondamentales)

- $\forall x \in [-1,1]$, $\sin \operatorname{Arcsin} x = x$ et $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\operatorname{Arcsin} \sin x = x$.
- $\forall x \in [-1,1]$, $\cos \operatorname{Arccos} x = x$ et $\forall x \in [0, \pi]$, $\operatorname{Arccos} \cos x = x$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\tan \operatorname{Arctan} x = x$ et $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\operatorname{Arctan} \tan x = x$.

⚠ Arcsin n'est pas la réciproque de sin mais de $\sin_{|\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}$: ~~$\forall x \in \mathbb{R}$~~, $\operatorname{Arcsin} \sin x = x$.

Exemple 67 On veut résoudre l'équation $\cos x = \frac{1}{3}$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Démonstration

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos x = \frac{1}{3} \iff \cos x = \cos \operatorname{Arccos} \frac{1}{3} \iff x \equiv \pm \operatorname{Arccos} \frac{1}{3} \ [2\pi].$$

L'ensemble des solutions cherché est donc la réunion $\left(\operatorname{Arccos} \frac{1}{3} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(-\operatorname{Arccos} \frac{1}{3} + 2\pi\mathbb{Z}\right)$. ■

Exemple 68 $\operatorname{Arccos} \cos \frac{20\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$, $\operatorname{Arcsin} \sin \frac{20\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$ et $\operatorname{Arctan} \tan \frac{20\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}$.

Démonstration

On se ramène d'abord sur $]0, 2\pi]$ et ensuite on essaie de se ramener sur le domaine privilégié de la fonction concernée.

- **Arccosinus :** On a $\frac{20\pi}{3} \equiv \frac{2\pi}{3}$ $[2\pi]$ et $\frac{2\pi}{3} \in [0, \pi]$ ce qui permet de conclure.
- **Arcsinus :** En revanche, $\frac{2\pi}{3} \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Pour se ramener dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, on utilise donc le fait que $\sin(\pi - x) = \sin(x)$ et donc $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ ce qui permet de conclure.
- **Arctan :** On a $\frac{20\pi}{3} \equiv -\frac{\pi}{3}$ $[\pi]$ et $-\frac{\pi}{3} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, ce qui permet de conclure. ■

ℹ Pour retomber dans le bon intervalle, on utilisera souvent les propriétés $\cos(-x) = \cos(x)$ et $\sin(\pi - x) = \sin(x)$.

Proposition 69 (Propriétés des fonctions trigonométriques réciproques)

(i) Pour tout $x \in [-1,1]$, $\cos \operatorname{Arcsin} x = \sin \operatorname{Arccos} x = \sqrt{1-x^2}$.

(ii) **Arcsinus :** Arcsin est impaire et continue sur $[-1,1]$ mais seulement dérivable sur $]-1,1[$. Pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\operatorname{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(iii) **Arccosinus :** Arccos est continue sur $[-1,1]$ mais seulement dérivable sur $]-1,1[$. Pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\operatorname{Arccos}'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(iv) **Arctangente :** Arctan est impaire et indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Démonstration

(i) Soit $x \in [-1,1]$. Puisque $\cos^2 = 1-\sin^2$ et que cos est positive sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, on a $\cos(t) = \sqrt{1-\sin^2(t)}$ pour tout $t \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Il vient :

$$\cos \operatorname{Arcsin} x = \sqrt{1-\sin^2(\operatorname{Arcsin} x)} = \sqrt{1-x^2}$$

De même, sin est positive sur $[0,\pi]$, donc $\sin \operatorname{Arccos} x = \sqrt{1-\cos^2(\operatorname{Arccos} x)} = \sqrt{1-x^2}$.

(ii) La fonction sin est continue sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ donc d'après le théorème de continuité d'une réciproque, la fonction Arcsin est continue sur $[-1,1]$.
De plus, la fonction sin est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et sa dérivée cos ne s'annule pas sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. Ainsi, d'après le théorème de dérivabilité d'une réciproque, la fonction Arcsin est dérivable sur $]-1,1[$. Ce dernier théorème ne nous dit RIEN sur la dérivabilité en ± 1 mais on peut montrer qu'elle n'y est pas dérivable.
La dérivée vaut alors : $\operatorname{Arcsin}'(x) = \dfrac{1}{\sin'(\operatorname{Arcsin} x)} = \dfrac{1}{\cos(\operatorname{Arcsin} x)} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pour tout $x \in]-1,1[$.
Enfin, soit $x \in [-1,1]$. Le réel $-\operatorname{Arcsin} x$ appartient à $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ et $\sin(-\operatorname{Arcsin} x) = -\sin(\operatorname{Arcsin} x) = -x$, donc par unicité $\operatorname{Arcsin}(-x) = -\operatorname{Arcsin} x$: la fonction Arcsin est impaire.

(iii) De même, la fonction cos est continue sur $[0,\pi]$, dérivable sur $]0,\pi[$ et sa dérivée $-\sin$ ne s'annule pas sur $]0,\pi[$. La fonction Arccos est donc continue sur $[-1,1]$, dérivable sur $]-1,1[$, et pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\operatorname{Arccos}'(x) = \frac{1}{\cos'(\operatorname{Arccos} x)} = \frac{-1}{\sin(\operatorname{Arccos} x)} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(iv) La fonction tan est indéfiniment dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et sa dérivée ne s'annule pas donc Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{Arctan}'(x) = \frac{1}{\tan' \circ \operatorname{Arctan} x} = \frac{1}{1+\tan^2(\operatorname{Arctan} x)} = \frac{1}{1+x^2}$$

■

Exemple 70 Pour tout $x > 0$, $\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$ et pour tout $x < 0$, $\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \dfrac{1}{x} = -\dfrac{\pi}{2}$

V) TABLEAUX RÉCAPITULATIFS

Fonction	Dérivée
e^x	e^x
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$
$\operatorname{th} x$	$1-\operatorname{th}^2 x = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$

Fonction	Dérivée
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$1+\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{Arcsin} x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{Arccos} x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{Arctan} x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$