FONCTIONS RÉELLES

Feuille d'exercices

I) GÉNÉRALITÉS

A - PARITÉ, PÉRIODICITÉ

Exercice 1 — Étudier la parité des fonctions suivantes :

1) $f_1 : x \longmapsto e^x - e^{-x}$, 2) $f_2 : x \longmapsto \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$, 3) $f_3 : x \longmapsto \dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}$.

Exercice 2 — Montrer que la fonction $f : x \longmapsto \ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$ est impaire.

Exercice 3 — Soient $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions impaires. Que dire de la parité de $f+g$, $f \times g$ et $f \circ g$?

Exercice 4 —

1) Que dire de la dérivée d'une fonction dérivable paire ? impaire ? périodique ?
2) Montrer que la somme d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante n'est pas nécessairement monotone.
3) Montrer que la somme de deux fonctions majorées (resp. bornées) est majorée (resp. bornée). Qu'en est-il du produit ?

Exercice 5 — Soient $T > 0$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction T-périodique. Montrer que, pour toute partie B de $\mathbb{R}$, l'ensemble $f^{-1}(B)$ est T-périodique, c'est-à-dire : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \in f^{-1}(B) \iff x + T \in f^{-1}(B)$.

B - REPRÉSENTATIONS GRAPHIQUES

Exercice 6 — Tracer rapidement l'allure du graphe des fonctions suivantes :

1) $x \longmapsto \sqrt{3x-4}$, 2) $x \longmapsto \dfrac{5}{2x+1}$, 3) $x \longmapsto 1 + \ln(2-x)$.

Exercice 7 —

1) Déterminer une expression explicite de la fonction affine f lorsque :
   a) le graphe de f coupe l'axe des abscisses en 3 et a pour pente 2 ;
   b) le graphe de f passe par les points de coordonnées $(-1, 2)$ et $(2, 1)$.
2) Tracer le graphe de $x \longmapsto 2|x-1| - |x+1|$.

Exercice 8 — On note f la fonction $x \longmapsto \sqrt{2-x}$.

1) Tracer rapidement l'allure du graphe de f.
2) Déterminer les points fixes de f et montrer que $[0, 2]$ et $[-2, 2]$ sont stables par f.

C - INJECTIVITÉ, SURJECTIVITÉ, BIJECTIVITÉ

Exercice 9 ★ —

1) La fonction $x \longmapsto xe^x$ est-elle injective sur $\mathbb{R}$? Déterminer son image.
2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer l'image de la fonction $x \longmapsto x^n \ln x$.
3) Montrer que la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{1}{x}$ est une bijection de $]0, 1[$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10 — Montrer que la fonction $x \longmapsto \sqrt{x^2-1}$ est une bijection de $[1, +\infty[$ sur son image (à préciser) :

1) grâce au théorème de la bijection ; 2) en calculant sa réciproque.

D - DÉRIVATION, ÉTUDE DE FONCTIONS

Exercice 11 — Sur quel ensemble les fonctions suivantes sont-elles définies ? continues ? dérivables ? On s'appuiera sur les théorèmes généraux du cours, sans étudier la dérivabilité aux points « problématiques ».

1) $x \longmapsto \ln(3-x) + \dfrac{\sqrt{x-1}}{x-2}$, 2) $x \longmapsto \sqrt{\ln x}$, 3) $x \longmapsto \sqrt{e^x + 2e^{-x} - 3}$,
4) $x \longmapsto \sqrt{2-|x-3|}$, 5) $x \longmapsto \operatorname{Arcsin}\sqrt{1-x^2}$.

Exercice 12 ★ — Calculer les dérivées successives des fonctions suivantes :

1) $x \longmapsto a^x$ $(a > 0)$, 2) $x \longmapsto x^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$, 3) cos et sin,
4) $x \longmapsto \dfrac{1}{x+a}$ $(a \in \mathbb{R})$, 5) $x \longmapsto \ln(3-2x)$, 6) $x \longmapsto \dfrac{1+x}{1-x}$.

Exercice 13 ★ —

1) Étudier la fonction $x \longmapsto \dfrac{x^3}{x^2-3}$: parité, variations, limites aux bornes et convexité.
2) Même question, sans la convexité, pour $x \longmapsto \sqrt{\dfrac{\ln|x|}{x}}$.

Exercice 14 ★ — Déterminer le nombre de racines réelles des fonctions polynomiales suivantes :

1) $x \longmapsto x^5 - x^3 + 1$, 2) $x \longmapsto 4x^3 - 18x^2 + 24x - 9$.

E - POUR ALLER PLUS LOIN

Exercice 15 ★★ — Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ croissantes pour lesquelles $f \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

Exercice 16 ★★ — Soit $k > 0$. Une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite **k-lipschitzienne** si $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $|f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y|$. On admet qu'une fonction lipschitzienne est

continue. Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $x^+ = \max(x,0)$ et $x^- = \max(-x,0)$; pour $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, on définit $f_+ : x \longmapsto (f(x))^+$ et $f_- : x \longmapsto (f(x))^-$.

1) Montrer que si f est k-lipschitzienne, alors f_+ et f_- le sont aussi.
2) Réciproquement, soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que f_+ et f_- sont k-lipschitziennes. Montrer que f est k-lipschitzienne.

II) Limites

Exercice 17 — Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \left(\exp(x) - x^3\right)$ 2) $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \left(\ln(x) - x - \sqrt{x}\right)$ 3) $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \dfrac{x^2+1}{x+1}$
4) $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \dfrac{7x+\ln(x)}{7x+\exp(x)}$ 5) $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \dfrac{\ln(x)}{\exp(\sqrt{3x})}$ 6) $\lim\limits_{x\longrightarrow0^+} x\exp\left(\dfrac{1}{x}-1\right)$
7) $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \left(\sqrt{x+2} - \sqrt{x+7}\right)$

Exercice 18 — Déterminer la limite en $+\infty$ des fonctions suivantes :

1) $x \longmapsto \ln x - \mathrm{e}^x$, 2) $x \longmapsto \dfrac{x^3}{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}$, 3) $x \longmapsto \dfrac{\ln(1+\mathrm{e}^x)}{\sqrt{x}}$, 4) $x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}+1}{\mathrm{e}^{x^2}+1}$.

Exercice 19 — Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} x^{1/x}$, 2) $\lim\limits_{x\longrightarrow0^+} x^{\sqrt{x}}$, 3) $\lim\limits_{x\longrightarrow0^+} x^{1/x}$.

III) Convexité

Exercice 20 — À l'aide d'arguments de convexité, montrer que :

1) $\mathrm{e}^x \geq 1+x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$;
2) $\ln x \leqslant x-1$ pour tout $x > 0$;
3) $\dfrac{2}{\pi}x \leqslant \sin x \leqslant x$ pour tout $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Exercice 21 — Déterminer les intervalles sur lesquels les fonctions suivantes sont convexes ou concaves, ainsi que les points d'inflexion de leur courbe :

1) $x \longmapsto x\mathrm{e}^{-x}$, 2) $x \longmapsto \ln\left(1+x^2\right)$, 3) $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$.

Exercice 22 ★ — Montrer que $x^x(1-x)^{1-x} \geq \dfrac{1}{2}$ pour tout $x \in\ ]0,1[$.

Indication : Étudier la fonction $x \longmapsto x\ln x + (1-x)\ln(1-x)$ sur $]0,1[$.

IV) Logarithme, exponentielle et puissances

A - Équations, inéquations

Exercice 23 — Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $\ln\left(x^2-1\right) - \ln(2x-1) + \ln 2 = 0$; 2) $\ln(x+2) - \ln(x+1) = \ln(x-1)$.

Exercice 24 — Résoudre les inéquations suivantes, après avoir précisé leur ensemble de définition :

1) $(2x-7)\ln(x+1) > 0$, 2) $\ln\dfrac{x+1}{3x-5} \leqslant 0$, 3) $(\ln x+1)(\ln x-2) > 0$.

Exercice 25 — Résoudre les équations suivantes, d'inconnue x réelle :

1) $x = \sqrt{2x-1}+2$, 2) $x^{\sqrt{x}} = \left(\sqrt{x}\right)^x$,
3) $2^{2x+3} + 5^{2x} = 5^{2x+1} - 2^{2x+1}$, 4) $\mathrm{e}^x - 4\mathrm{e}^{-x} = 3$.

Exercice 26 ★ —

1) Résoudre l'équation $2^x + 3^x = 5$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
2) Montrer que l'équation $x\ln x = 1$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$ possède une et une seule solution.
3) Montrer que l'équation $\mathrm{e}^{-x^2} = \mathrm{e}^x - 1$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ possède une et une seule solution.
4) Combien la fonction $x \longmapsto 1 + \dfrac{x}{\ln x}$ possède-t-elle de points fixes ?
5) Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(0) = 1$ et $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

B - Inégalités

Exercice 27 —

1) Montrer que $\ln(1+x) \geq x - \dfrac{x^2}{2}$ pour tout $x \geq 0$.
2) En déduire $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 + \dfrac{k}{n^2}\right)$.

Exercice 28 — Montrer que $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e} \leqslant \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{-n}$ pour tout entier $n \geq 2$.

Exercice 29 ★ —

1) Comparer $(1+x)^\alpha$ et $1+\alpha x$ pour tous $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x > -1$.
2) En déduire que pour tous $\alpha \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{\alpha}{k}\right) \geq (n+1)^\alpha .$$

Exercice 30 ★ —

1) Le prix de mon café augmente de 20 % cette année, de 5 % l'année prochaine et de 25 % l'année suivante. En moyenne, de quel pourcentage a-t-il augmenté chaque année sur cette période ?

2) Soient $x_1, \dots, x_n > 0$. On pose : $a = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k$ et $g = \sqrt[n]{\displaystyle\prod_{k=1}^{n} x_k}$.

Simplifier $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x_k}{a} - 1\right)$ et en déduire que $g \leqslant a$.

Exercice 31 ★★ — Montrer les inégalités suivantes :

1) $\mathrm{e}^x \leqslant 1 + x + \dfrac{\mathrm{e}x^2}{2}$ pour tout $x \leqslant 1$;

2) $\dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} \geq x + \mathrm{e} - 2$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$;

3) $x\ln x - (x-1) \geq \dfrac{3(x-1)^2}{2(x+2)}$ pour tout $x > 0$.

Exercice 32 ★ — Montrer que $\mathrm{e}^x \geq \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \geq 0$.

C - Études de fonctions

Exercice 33 ★ —

1) Déterminer le domaine de définition de la fonction $x \longmapsto x^x$. Étudier les variations de cette fonction et ses limites aux bornes.

2) Soit $y \in \mathbb{R}$. Quel est le nombre de solutions de l'équation $y = x^x$, d'inconnue $x > 0$?

Exercice 34 —

1) Dresser le tableau de variations de la fonction $f : x \longmapsto (1+x)^x$.

2) En déduire que $(1+x)^x \geq 1$ pour tout $x > -1$.

V) Fonctions circulaires

A - Valeurs, formules

Exercice 35 ★ — Déterminer les valeurs de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

Indication : Utiliser une formule de duplication et la valeur de $\cos\dfrac{\pi}{6}$.

Exercice 36 — Exprimer $\cos(3a)$ en fonction de $\cos a$, et $\sin(3a)$ en fonction de $\sin a$.

Exercice 37 — Linéariser les expressions suivantes, c'est-à-dire les écrire comme combinaisons de cos et de sin sans produits ni puissances :

1) $\cos^2 x$, 2) $\cos a \cos b$, 3) $\cos x \sin^2 x$.

Indication : Utiliser les formules d'addition et de duplication.

Exercice 38 — Écrire les expressions suivantes sous la forme $A\cos(x-\varphi)$, avec $A > 0$ et $\varphi \in \mathbb{R}$:

1) $\cos x + \sin x$, 2) $\cos x - \sqrt{3}\sin x$.

Exercice 39 ★ — Soit x un réel qui n'est pas de la forme $(2k+1)\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. On pose $t = \tan\dfrac{x}{2}$. Montrer que $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ et $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$.

B - Équations, inéquations

Exercice 40 — Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $\sin x = \dfrac{1}{2}$, 2) $\tan x = \sqrt{3}$, 3) $\cos x = -1$, 4) $\sin(3x) = 1$.

Indication : Chercher d'abord les solutions dans $]0, 2\pi[$.

Exercice 41 — Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes (sans les réciproques) :

1) $\sin(5x) = \sin\left(\dfrac{2\pi}{3} + x\right)$, 2) $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \cos(2x)$,

3) $\tan\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \tan(2x)$.

Exercice 42 — Résoudre graphiquement sur $[0, 2\pi]$, puis sur $[-\pi, \pi]$, puis sur $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1) $\sin x \geq \dfrac{1}{2}$, 2) $\cos x \geq \dfrac{1}{2}$.

Exercice 43 ★ — Pour quelles valeurs de m l'équation $\sqrt{3}\cos x - \sin x = m$ admet-elle des solutions ? Les déterminer lorsque $m = \sqrt{2}$.

VI) Fonctions circulaires réciproques

A - Valeurs, simplifications, graphes

Exercice 44 — Simplifier les expressions suivantes :

1) $\operatorname{Arcsin}\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right)$, 2) $\operatorname{Arccos}\left(\cos\frac{6\pi}{5}\right)$, 3) $\operatorname{Arccos}\left(\sin\frac{\pi}{7}\right)$.

Exercice 45 — Simplifier les expressions suivantes :

1) $\tan(\operatorname{Arcsin} x)$, 2) $\cos(\operatorname{Arctan} x)$, 3) $\sin(2\operatorname{Arccos} x)$.

Exercice 46 ★ — Soit $f : x \longmapsto \operatorname{Arcsin}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2) En posant $x = \sin t$, simplifier l'expression de $f(x)$.

Exercice 47 ★ — Tracer les courbes représentatives des fonctions suivantes :

1) $x \longmapsto \operatorname{Arctan}(\tan x)$, 2) $x \longmapsto \operatorname{Arccos}(\cos x)$, 3) $x \longmapsto \operatorname{Arcsin}(\sin x)$.

B - Identités et équations

Exercice 48 — On souhaite établir que $\operatorname{Arccos} x + \operatorname{Arcsin} x = \frac{\pi}{2}$ pour tout $x \in [-1,1]$ de deux façons :

1) En étudiant une fonction. 2) En appliquant la fonction cosinus.

Exercice 49 ★ — On souhaite établir que $\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ pour tout $x > 0$.

1) Démontrer cette identité en étudiant la fonction définie par le membre de gauche.
2) Démontrer cette identité en calculant la tangente d'un angle bien choisi.

Exercice 50 ★ — Résoudre les équations suivantes, d'inconnue x réelle :

1) $\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan}(3x) = \pi/2$, 2) $\operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arcsin}(3x) = \pi/2$,
3) $\operatorname{Arccos}(2x) - \operatorname{Arccos} x = \pi/4$.

Exercice 51 ★ —

1) Soit $p \in \mathbb{N}$. Exprimer $\operatorname{Arctan}(p+1) - \operatorname{Arctan} p$ sous la forme $\operatorname{Arctan}(\ldots)$.
2) En déduire la limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $S_n = \sum_{p=0}^{n} \operatorname{Arctan}\frac{1}{p^2+p+1}$.

VII) Fonctions hyperboliques

A - Formules, équations

Exercice 52 ★ —

1) Montrer que $\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, puis en déduire une relation analogue pour $\operatorname{sh}(x+y)$. Exprimer enfin $\operatorname{th}(x+y)$ en fonction de $\operatorname{th} x$ et $\operatorname{th} y$.
2) Que vaut $\lim_{u\longrightarrow 0} \frac{\operatorname{th} u}{u}$? En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \operatorname{th}^2\left(\frac{x}{2^k}\right)\right) = \frac{x}{\operatorname{th} x}.$$

Exercice 53 —

1) Montrer que sh est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer une expression explicite de sa réciproque.
2) Même question pour th, de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$.
3) Même question pour la restriction de ch à $\mathbb{R}_+$, de $\mathbb{R}_+$ sur $[1,+\infty[$.

B - Sommes et produits

Exercice 54 —

1) Vérifier que $\operatorname{sh}(2a) = 2\operatorname{sh} a \operatorname{ch} a$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.
2) Soient $x \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer à l'aide de sh le produit $\prod_{k=1}^{n} \operatorname{ch}\left(\frac{x}{2^k}\right)$.

Exercice 55 ★ — Montrer, sans récurrence, que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(2kx) = \frac{\operatorname{sh}((n+1)x)}{\operatorname{sh} x} \operatorname{ch}(nx).$$

Exercice 56 ★ — Soient $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$. Exprimer

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \operatorname{ch}(kt) \text{ et } S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \operatorname{sh}(kt)$$

en fonction de $\operatorname{ch}\left(\frac{t}{2}\right)$, $\operatorname{ch}\left(\frac{nt}{2}\right)$ et $\operatorname{sh}\left(\frac{nt}{2}\right)$.

Exercice 57 ★ — Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

1) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{th}((n+1)x) - \operatorname{th}(nx) = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}(nx)\operatorname{ch}((n+1)x)}$.
2) En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, la valeur de $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\operatorname{ch}(kx)\operatorname{ch}((k+1)x)}$.