DÉNOMBREMENT

Feuille d'exercices

I) DÉNOMBREMENT EN TOUT GENRE

Exercice 1 — On tire simultanément 5 cartes d'un jeu de 32 cartes. Combien de tirages différents peut-on obtenir :

1) sans imposer de contraintes sur les cartes.
2) contenant 5 carreaux ou 5 piques.
3) contenant 2 carreaux et 3 piques.
4) contenant au plus un roi.
5) contenant au moins un roi.
6) contenant exactement 2 rois et exactement 3 piques.

Exercice 2 — Dénombrer les anagrammes des mots suivants : « MATHS », « RIRE », « ANANAS ».

Exercice 3 — Combien existe-t-il de mots de 9 lettres contenant le mot :

1) « COLLE » ? 2) « MATH » ? 3) « TEST » ?

Exercice 4 — Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $m, n \geq p$. À l'issue d'un concours, m filles et n garçons sont admis. Combien de classements des $2p$ premiers admis contenant autant de filles que de garçons peut-on former ?

Exercice 5 — Combien y a-t-il d'applications de $[\![1;n]\!]$ vers $[\![1;p]\!]$:

1) constantes ? 2) strictement croissantes ? 3) strictement monotones ?
4) ★★ croissantes ? 5) monotones ?

Indication : Question 4) : trois méthodes possibles, à essayer chacune.

- ***Méthode 1.*** *À f croissante, associer $g : k \longmapsto f(k) + k - 1$. Montrer que g est strictement croissante, préciser l'ensemble d'arrivée, puis utiliser la question 2).*
- ***Méthode 2.*** *Représenter f par un chemin de $(0,1)$ à (n,p) formé de pas de longueur 1 vers la droite ou vers le haut, le k-ième pas vers la droite étant fait à la hauteur $f(k)$. Compter ensuite ces chemins.*
- ***Méthode 3.*** *Classer les applications croissantes selon le cardinal k de leur image. Pour k fixé, choisir l'image, puis les endroits où f change de valeur. Conclure avec la formule de Vandermonde (**Exercice 22**).*

Exercice 6 — On s'intéresse à des tableaux de n lignes et p colonnes dont chaque case contient 0 ou 1. Combien en existe-t-il :

1) qui contiennent n coefficients 1 en tout ?
2) dont chaque ligne contient exactement un coefficient 1 ?
3) dont chaque ligne contient exactement deux coefficients 1 ?
4) (ici $n = p$) dont chaque ligne et chaque colonne contiennent exactement un coefficient 1 ?

Exercice 7 — Combien y a-t-il de couples (x, y) :

1) dans $[\![1;n]\!]^2$ pour lesquels $x + y = n$?
2) dans $[\![1;n]\!]^2$ pour lesquels $x < y$?
3) dans $[\![1;n]\!] \times [\![1;2n]\!]$ pour lesquels $x < y$?
4) dans $[\![1;n]\!]^2$ pour lesquels $|x - y| \leqslant 1$?

Exercice 8 — Dénombrer les triplets (i, j, k) tels que $i + j + k = 151$ et $i, j, k \in [\![1;75]\!]$.

Exercice 9 — Étant donnée sa décomposition en facteurs premiers, combien un entier naturel non nul possède-t-il de diviseurs positifs ?

Exercice 10 — Combien d'entiers naturels inférieurs ou égaux à 1000 ne sont divisibles ni par 5 ni par 7 ?

Exercice 11 — Soit E un ensemble fini non vide de cardinal n.

1) Combien existe-t-il de relations binaires sur E ?
2) Combien de relations binaires réflexives ?
3) Combien de relations binaires réflexives et symétriques ?

Exercice 12 — Soient $n, p \in \mathbb{N}$ avec $p \leqslant n$. Combien existe-t-il de parties de $[\![1;n]\!]$ qui contiennent :

1) un et un seul élément de $[\![1;p]\!]$? 2) au moins un élément de $[\![1;p]\!]$?

Exercice 13 — Soit E un ensemble fini de cardinal n. Combien existe-t-il de couples (A, B) de parties de E pour lesquels :

1) $A \cap B = \varnothing$ et $A \cup B = E$? 2) $A \cap B = \varnothing$? (Donner deux méthodes)
3) $A \cup B = E$?

Exercice 14 ★ — Combien y a-t-il d'applications $f : [\![1;n]\!] \longrightarrow [\![1;n]\!]$ telles que $f \circ f = f$? On donnera le résultat sous la forme d'une somme.

Exercice 15 ★ — Soit f une involution de $E = [\![1;2n+1]\!]$, c'est-à-dire que $f : E \longrightarrow E$ est telle que $f \circ f = \mathrm{Id}_E$. Montrer que f possède un point fixe.

Exercice 16 ★★ — (**Formule du crible**) Soient E un ensemble et $A_1, \ldots, A_p$ des parties de E.

1) Montrer que : $\mathbf{1}_{A_1 \cup \cdots \cup A_p} = 1 - \prod_{i=1}^{p} \left(1 - \mathbf{1}_{A_i}\right)$.

2) En déduire que, si les A_i sont finies :

$$\mathrm{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{p} A_i\right) = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant p} \mathrm{Card}\left(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}\right).$$

Exercice 17 ★★ — Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. On note $S(n,p)$ le nombre de surjections de $[\![1;n]\!]$ dans $[\![1;p]\!]$.

1) Déterminer $S(n,1)$, $S(n,2)$ et $S(n,n)$.
2) Pour $n \geq 2$, déterminer $S(n,n-1)$.
3) Montrer que : $p^n = \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} S(n,k)$.
4) Pour $i \in [\![1;p]\!]$, on note A_i l'ensemble des applications de $[\![1;n]\!]$ dans $[\![1;p]\!]$ qui ne prennent pas la valeur i. À l'aide de ces ensembles et de la formule du crible, montrer que

$$S(n,p) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} (p-k)^n.$$

Exercice 18 ★★ — (**Nombres de Catalan**) Soient n et p deux entiers naturels non nuls.

On appelle chemin monotone, tout déplacement sur une grille de coordonnées entières obtenu en partant de la case $(0,0)$ et en se déplaçant successivement d'une unité vers la droite ou d'une unité vers le haut.

1) Combien existe-t-il de chemins monotones rejoignant la case (n,p) ?

On s'intéresse désormais aux chemins monotones rejoignant la case (n,n). On dit qu'un tel chemin est sous-diagonal si les cases (x,y) qu'il emprunte vérifient la condition $y \leqslant x$.

2) On considère un chemin qui n'est pas sous-diagonal et on lui associe un nouveau chemin déterminé en changeant les mouvements vers la droite par des mouvements vers le haut, et inversement, dès son premier franchissement de la diagonale.
Quelle nouvelle case rejoint ce chemin ?
3) Combien existe-t-il de chemins sous-diagonaux rejoignant la case (n,n) ?

II) Calculs de sommes

Exercice 19 ★ — Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$. Calculer :

1) $\sum_{X \subset E} \mathrm{Card}(X)$ 2) $\sum_{X,Y \subset E} \mathrm{Card}(X \cap Y)$ 3) $\sum_{X,Y \subset E} \mathrm{Card}(X \cup Y)$

Exercice 20 ★ — Montrer que, pour tout $n \geq 2$,

$$\sum_{X \in \mathscr{P}([\![1;n]\!])} \sum_{k \in X} k = n(n+1)2^{n-2}.$$

Exercice 21 ★★ — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des permutations de $[\![1;n]\!]$.
Calculer $\dfrac{1}{n!} \sum_{f \in \mathcal{S}_n} \sum_{k=1}^{n} |f(k) - k|$.

Indication : On pourra intervertir les sommes.

III) Double comptage et relations de récurrence

Exercice 22 ★ — Soient $p,q\in\mathbb{N}$ et $n\in[\![0;p+q]\!]$. Proposer une démonstration par dénombrement de l'égalité

$$\binom{p+q}{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{p}{k}\binom{q}{n-k}$$

Exercice 23 ★ — Soient $n,p\in\mathbb{N}$.

1) Quelles sont les valeurs possibles du maximum d'une $(p+1)$-combinaison de $[\![1;n+p+1]\!]$?
2) Calculer de deux manières le nombre de $(p+1)$-combinaisons de $[\![1;n+p+1]\!]$. Conclusion ?

Exercice 24 ★ — Soient $n,k\in\mathbb{N}^*$. Soit $u_{n,k}$ le nombre de parties de $[\![1;n]\!]$ de cardinal k qui ne contiennent pas deux entiers consécutifs. Montrer que $u_{n,k}=\binom{n-k+1}{k}$. On pourra commencer par établir une relation de récurrence.

IV) Principe des tiroirs

Exercice 25 — On considère un ensemble X de $n+1$ entiers distincts choisis dans $[\![1;2n]\!]$. Démontrer que parmi les éléments de X, on peut toujours trouver 2 entiers :

1) consécutifs.
2) dont la somme fait $2n+1$.
3) ★★ dont l'un divise l'autre.

Exercice 26 ★ — Soit A une partie de $[\![1;100]\!]$ de cardinal 55. Montrer qu'il existe $n\in A$ tel que $n+9\in A$.

Exercice 27 ★★★ —

1) Soient $x_1,\dots,x_n\in\mathbb{Z}$. Montrer l'existence d'une partie non vide I de $[\![1;n]\!]$ pour laquelle $\sum_{i\in I}x_i$ est un multiple de n.
   Indication : On pourra faire une division euclidienne.
2) Soient $x_1,\dots,x_n\in\mathbb{R}$. Montrer l'existence d'une partie non vide I de $[\![1;n]\!]$ et d'un entier N pour lesquels $\left|N-\sum_{i\in I}x_i\right|\leqslant\frac{1}{n+1}$.