DEVOIR MAISON 1

Moyenne arithmético-géométrique

Problème — On appelle **moyenne géométrique** et **moyenne arithmétique** des réels strictement positifs $a_1,\dots,a_k$ les réels $\left(\prod_{j=1}^{k} a_j\right)^{\frac{1}{k}}$ et $\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} a_j$ respectivement. Dans cet exercice, on se propose de démontrer l'**inégalité arithmético-géométrique**, qui affirme que

$$\left(\prod_{j=1}^{k} a_j\right)^{\frac{1}{k}} \leqslant \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} a_j.$$

1) Soient a,b,c,d des réels strictement positifs.

a) Montrer que

$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}.$$

b) Justifier que $(abcd)^{\frac{1}{4}} = \sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{cd}}$ et en déduire que $(abcd)^{\frac{1}{4}} \leqslant \frac{a+b+c+d}{4}$.

2) Montrer que, pour tout $k \geq 1$ et pour tous réels strictement positifs $a_1,\dots,a_{2k}$, on a

$$\left(\prod_{j=1}^{2^k} a_j\right)^{\frac{1}{2^k}} \leqslant \frac{1}{2^k}\sum_{j=1}^{2^k} a_j.$$

Indication. On pourra s'inspirer de la Question 1)b)

3) Soient $k \geq 1$ un entier et $a_1,\dots,a_k$ des réels strictement positifs. On note G et A leurs moyennes géométrique et arithmétique respectivement, de sorte que

$$G^k = \prod_{j=1}^{k} a_j \qquad \text{et} \qquad kA = \sum_{j=1}^{k} a_j.$$

a) Montrer que, pour tout $m \geq 1$, on a : $2^m \geq m$.

b) Exprimer les moyennes géométrique et arithmétique des 2^k réels $a_1,\dots,a_k,\underbrace{A,\dots,A}_{2^k-k \text{ fois}}$ à l'aide de k, G et A.

c) Conclure que $G \leqslant A$, *i.e.* que : $\left(\prod_{j=1}^{k} a_j\right)^{\frac{1}{k}} \leqslant \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} a_j$.

En guise d'application, on se propose de montrer l'**inégalité de Carleman** : si on se donne un entier $n \geq 1$ et des réels strictement positifs $x_1,\dots,x_n$, on a

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{k} x_j\right)^{\frac{1}{k}} \leqslant e\sum_{k=1}^{n} x_k.$$

4) Pour la suite du problème, on pose $u_j = \frac{(j+1)^j}{j^{j-1}}$ pour tout $j \geq 1$.

a) En étudiant la fonction $f : x \longmapsto \ln(1+x) - x$ définie sur $\mathbb{R}_+$, montrer que $\frac{\ln(1+x)}{x} \leqslant 1$, pour tout $x > 0$.

b) Pour tout $j \geq 1$, montrer que $\frac{u_j}{j} \leqslant e$.

5) Pour tout $k \geq 1$, calculer $\prod_{j=1}^{k} u_j$ et en déduire que $\left(\prod_{j=1}^{k} x_j\right)^{\frac{1}{k}} \leqslant \frac{1}{k(k+1)}\sum_{j=1}^{k} x_j u_j$.

6) Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}\sum_{j=1}^{k} x_j u_j \leqslant \sum_{j=1}^{n} x_j \frac{u_j}{j}$$

et conclure quant à l'inégalité de Carleman.