DEVOIR SURVEILLÉ 1

Samedi 19 septembre (4h)

Problème 1 — Soient E et F deux ensembles.

1) Montrer que : $E \subset F \implies \mathscr{P}(E) \subset \mathscr{P}(F)$.

2) Établir : $\mathscr{P}(E \cap F) = \mathscr{P}(E) \cap \mathscr{P}(F)$.

3) A-t-on $\mathscr{P}(E \cup F) = \mathscr{P}(E) \cup \mathscr{P}(F)$? Traiter chaque inclusion séparément.

Problème 2 — On définit les fonctions cosinus et sinus hyperboliques en posant, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

1) Calculer ch(0) et sh(0), puis montrer que ch et sh sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et exprimer ch$'$ et sh$'$ à l'aide de ch et sh.

2) Étudier les variations de ch sur $\mathbb{R}$. En déduire que $\operatorname{ch} x \geq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3) Déterminer l'ensemble des $y \in \mathbb{R}$ pour lesquels à la fois $\sqrt{y^2-1}$ est défini, $y - \sqrt{y^2-1} > 0$ et $y + \sqrt{y^2-1} > 0$.

4) Soit $y \in \mathbb{R}$ fixé. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\operatorname{ch} x = y$, d'inconnue x.

5) *Cette question est indépendante des questions 2 à 4 : on n'y utilisera que les résultats de la question 1.*
Montrer que toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable s'écrit d'une et d'une seule manière sous la forme

$$f : x \longmapsto a \operatorname{ch} x + b \operatorname{sh} x + g(x),$$

où a et b sont des réels et où $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifie $g(0) = g'(0) = 0$.

Problème 3 — Les questions suivantes sont indépendantes.

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\dfrac{1+x}{1-x} \leqslant 1 - |x|$.

2) Simplifier la somme $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} 2^i j$, la somme $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \frac{i^2}{j(j+1)}$ et le produit $\displaystyle\prod_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \frac{i^2}{j+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3) Déterminer une expression explicite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{2^n(n+1)}{n+3} u_n$. Pas de calcul avec des points de suspension.

4) **a)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $2\sqrt{n} + \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} \leqslant 2\sqrt{n+1}$.

b) Montrer, par exemple par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $2\sqrt{n+1} - 2 \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant 2\sqrt{n}$,

puis en déduire la limite $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Problème 4 — (**Autour des coefficients binomiaux**) *Les deux parties de ce problème sont indépendantes.*

Partie I. Calcul d'une somme

Le but de cette première partie est de démontrer, de deux manières différentes, que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \qquad (\star)$$

1) **Méthode 1.** Proposer une première démonstration de l'identité $(\star)$. Une réponse avec une récurrence donnera maximum un quart des points.

2) **Méthode 2 :** *en utilisant la formule du triangle de Pascal généralisée.*

a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Démontrer, sans évoquer la formule de Pascal, que : $\forall \ell \in [\![0; k]\!],\ \binom{k}{\ell} = \binom{k+1}{\ell+1} - \binom{k}{\ell+1}$.

b) Soient $\ell, n \in \mathbb{N}$ tels que $\ell \leqslant n$. Montrer que *formule du triangle de Pascal généralisée* : $\displaystyle\sum_{k=\ell}^{n} \binom{k}{\ell} = \binom{n+1}{\ell+1}$

c) Soit $k \in \mathbb{N}$. Expliciter les coefficients binomiaux $\binom{k}{1}$, $\binom{k}{2}$ et $\binom{k}{3}$.

d) En déduire qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ k^3 = a\binom{k}{3} + b\binom{k}{2} + c\binom{k}{1}$$

e) Retrouver alors $(\star)$.
Si les coefficients a, b et c n'ont pas été obtenus à la Question 2)d), un calcul littéral pourra tout de même être effectué.

Partie II. Formule d'inversion de Pascal

Soit $(a_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. À partir de celle-ci, on définit une suite $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad b_k=\sum_{\ell=0}^{k}\binom{k}{\ell}a_\ell$$

L'objectif de cette partie est de trouver, pour tout $n\in\mathbb{N}$, l'expression de a_n en fonction de $b_0,\dots,b_n$.

3) Soient $n,k,\ell\in\mathbb{N}$ tels que $\ell\leqslant k\leqslant n$. Montrer que : $\quad\binom{n}{k}\binom{k}{\ell}=\binom{n}{\ell}\binom{n-\ell}{k-\ell}$

4) Soient $n,\ell\in\mathbb{N}$ tels que $\ell\leqslant n$. On pose $S_{n,\ell}=\displaystyle\sum_{k=\ell}^{n}(-1)^{k-\ell}\binom{n}{k}\binom{k}{\ell}$. Montrer que : $\quad S_{n,\ell}=\begin{cases}0 & \text{si } \ell<n\\ 1 & \text{si } \ell=n\end{cases}$

5) Conclure que : $\quad\forall n\in\mathbb{N},\quad a_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}\binom{n}{k}b_k$.

6) **Application.** On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0=1$ et : $\quad\forall n\in\mathbb{N},\quad x_{n+1}=(n+1)x_n+(-1)^{n+1}$.

a) Démontrer que : $\quad\forall n\in\mathbb{N},\quad n!=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x_k$.

b) En déduire que : $\quad\forall n\in\mathbb{N},\quad x_n=n!\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$.

Problème 5 — On souhaite montrer que les fonctions $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ telles que

$$(E)\qquad\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad f(xy)=f\left(f(x)+f(y)\right)$$

sont exactement les fonctions constantes sur $\mathbb{R}$.

1) Vérifier que les fonctions constantes sont bien solutions de (E).

2) On se donne maintenant une fonction f qui vérifie (E).

a) Montrer que l'on a $\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\quad f(xyz)=f\left((f(x)+f(y))z\right)$.

b) On suppose que $f(0)\neq 0$.

i) Soit $a\in\mathbb{R}$. En utilisant $x=0=y$ et z bien choisi, montrer que $f(a)=f(0)$.

ii) Conclure dans le cas $f(0)\neq 0$.

c) On suppose que $f(0)=0$.

i) Montrer que $\forall(y,z)\in\mathbb{R}^2,\quad f\left(f(y)z\right)=0$.

ii) Supposons qu'il existe $x\in\mathbb{R}$ tel que $f(x)\neq 0$: trouver une contradiction.

iii) Conclure dans le cas $f(0)=0$.

3) Conclure sur ce que l'on vient de démontrer.