RELATIONS BINAIRES ET APPLICATIONS

Feuille d'exercices

I) RELATIONS BINAIRES

Exercice 1 — Dire si les relations suivantes sont réflexives, symétriques, antisymétriques, transitives :

1) $E=\mathbb{Z}$ et $x\mathcal{R}y \iff x=-y$;
2) $E=\mathbb{R}$ et $x\mathcal{R}y \iff \cos^2 x+\sin^2 y=1$;
3) $E=\mathbb{N}$ et $x\mathcal{R}y \iff \exists p,q\geq 1,\ y=px^q$ (p et q sont des entiers).

Quelles sont parmi les exemples précédents les relations d'ordre et les relations d'équivalence (auquel cas, donner les classes d'équivalence) ?

A - RELATIONS D'ÉQUIVALENCE

Exercice 2 — Sur $\mathbb{R}^2$, on définit la relation $\mathcal{R}$ par

$$(x,y)\mathcal{R}(x',y') \iff x=x'.$$

Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence, puis déterminer la classe d'équivalence d'un élément $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$.

Exercice 3 — On définit une relation binaire $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{Z}$ par $x\mathcal{R}y$ si, et seulement si, $x+y$ est pair. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence et préciser ses classes d'équivalence.

Exercice 4 ★★ —

1) Soient E et F deux ensembles et $f:E\longrightarrow F$ une application. Pour tous $x,x'\in E$, on dit que $x\sim x'$ si $f(x)=f(x')$. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur E et décrire la classe d'équivalence de x pour $\sim$ pour tout $x\in E$.
2) Dans cette question, $E=\mathbb{C}$, $F=\mathbb{R}_+$ et f est la fonction $z\longmapsto|z|$. Déterminer un ensemble de représentants des classes d'équivalence de $\sim$.
3) Dans cette question, $E=\mathbb{R}_+^*$, $F=\mathbb{R}$ et f est la fonction $x\longmapsto x\ln x$. Calculer le cardinal de la classe d'équivalence de x pour $\sim$ pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$.
4) Soient A un ensemble et $B\in\mathscr{P}(A)$. Dans cette question, $E=F=\mathscr{P}(A)$ et f est l'application $X\longmapsto X\cap B$. Montrer que $\mathscr{P}(B)$ est un ensemble de représentants des classes d'équivalence de $\sim$.
5) ★★ On revient au cas général de la question 1) et on note $\bar{x}$ la classe d'équivalence de x pour $\sim$ pour tout $x\in E$. On veut définir une application $\bar{f}:E/\sim\longrightarrow F$ en posant $\bar{f}(\bar{x})=f(x)$ pour tout $x\in E$, mais cette définition pose a priori problème. Quel problème ? Montrer que le problème n'en est pas un, puis que $\bar{f}$ est injective.

B - RELATION D'ORDRE

Exercice 5 — Soit $f:E\longrightarrow\mathbb{R}$ une application injective. On définit sur E une relation binaire $\preccurlyeq$ par

$$x\preccurlyeq y \iff f(x)\leqslant f(y)$$

1) Montrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre sur E.
2) S'agit-il d'une relation d'ordre totale ?

Exercice 6 — On définit une relation binaire $\preccurlyeq$ sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$x\preccurlyeq y \iff \exists n\in\mathbb{N},\ y=x^n$$

Montrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre. Cet ordre est-il total ?

Exercice 7 — Soit E l'ensemble des couples (I,f) formés d'un intervalle I et d'une fonction réelle définie sur I. On définit une relation $\preccurlyeq$ sur E par : $(I,f)\preccurlyeq(J,g) \iff I\subset J$ et $g_{|I}=f$. Montrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre sur E.

Exercice 8 — Soient E un ensemble et $\preccurlyeq$ une relation d'ordre sur E. Pour tous $x,y\in E$, on notera xy le couple (x,y) pour alléger.

1) Pour tous $xy,x'y'\in E^2$, on dit que $xy\preccurlyeq^\circ x'y'$ si $x\preccurlyeq x'$ et $y\preccurlyeq y'$.
   a) Montrer que $\preccurlyeq^\circ$ est une relation d'ordre.
   b) Montrer que si E possède au moins deux éléments, $\preccurlyeq^\circ$ n'est pas totale.
2) Pour tous $xy,x'y'\in E^2$, on dit que $xy\preccurlyeq^\star x'y'$ si $x\prec x'$ ou $\big(x=x'$ et $y\preccurlyeq y'\big)$.
   a) Montrer que $\preccurlyeq^\star$ est une relation d'ordre.
   b) Montrer que si $\preccurlyeq$ est totale, $\preccurlyeq^\star$ l'est aussi.

Exercice 9 ★★ — Soit E un ensemble.

1) Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E. Pour tous $x,y\in E$, on dit que $x\mathcal{R}^{\mathrm{tr}}y$ si :

   $$\exists n\in\mathbb{N}^*,\ \exists x_0,\dots,x_n\in E,\ \ x=x_0 \text{ et } (\forall k\in[\![0;n-1]\!],\ x_k\mathcal{R}\,x_{k+1}) \text{ et } x_n=y.$$

   La relation $\mathcal{R}^{\mathrm{tr}}$ ainsi définie est appelée la **clôture transitive** de $\mathcal{R}$.
   a) Montrer que $\mathcal{R}^{\mathrm{tr}}$ est transitive.
   b) Montrer que si $\mathcal{R}$ est réflexive, $\mathcal{R}^{\mathrm{tr}}$ l'est aussi.
   c) Montrer que si $\mathcal{R}$ est symétrique, $\mathcal{R}^{\mathrm{tr}}$ l'est aussi.
2) On rappelle qu'une relation binaire sur E n'est jamais qu'une partie de $E\times E$.
   a) ★ Soient $\preccurlyeq$ une relation d'ordre sur E et $u,v\in E$ deux éléments pour lesquels $u\not\preccurlyeq v$ et $v\not\preccurlyeq u$. Montrer que $(\preccurlyeq\cup\{(u,v)\})^{\mathrm{tr}}$ est une relation d'ordre sur E.
   b) ★★ En déduire que si E est fini, toute relation d'ordre sur E est incluse dans une relation d'ordre totale (**théorème d'extension de Szpilrajn**).

II) Applications

A - Applications explicites

Exercice 10 — Soient $f : n \longmapsto n+1$ et $g : n \longmapsto \max\{0, n-1\}$ définies sur $\mathbb{N}$. Montrer que $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$, mais que f et g ne sont pas bijectives de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$. Que faut-il en retenir ?

Exercice 11 — Soit $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}^*$ l'application définie par $s(n) = n+1$. Montrer que l'application s est bijective :

1) En vérifiant injectivité et surjectivité.
2) En comptant le nombre d'antécédents.
3) En déterminant une application susceptible d'être sa bijection réciproque.

Exercice 12 — Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

1) a) $(x,y) \longmapsto 2y$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
   b) $(x,y) \longmapsto (1, x-y, y)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$.
   c) $(x,y) \longmapsto (2x+y, 3x-2y)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.
   d) $(x,y,z) \longmapsto (x+y+z, x-y-z, x)$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.
2) a) $x \longmapsto x^2+1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. b) $z \longmapsto z^2+1$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.
3) $(a,b) \longmapsto a+b\sqrt{2}$ de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$. 4) $f \longmapsto f(1)-f(0)$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 13 —

1) On note f la fonction $x \longmapsto \sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right)$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Déterminer $f(\,]0,1[\,)$ et $f^{-1}(\{0\})$.
2) Déterminer l'image réciproque de $[-1,2]$ par la fonction $x \longmapsto \sqrt{x^2+x+1}$.
3) On note f la fonction $x \longmapsto \dfrac{x}{1+x^2}$. Déterminer l'image de f et $f^{-1}\left(\left[\dfrac{1}{4}, 1\right]\right)$.

Exercice 14 — Proposer une bijection de $[-1,1]$ sur $[a,b]$ pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ pour lesquels $a < b$.

Exercice 15 —

1) Proposer une bijection explicite de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Z}$.
2) En exploitant le théorème de factorisation première, proposer une injection de $\mathbb{N}^k$ dans $\mathbb{N}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
3) Montrer que l'application :
$$(m,n) \longmapsto \frac{(m+n)(m+n+1)}{2} + n$$
est bijective de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}$.

Exercice 16 — Déterminer toutes les injections $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ pour lesquelles $f(n) \leqslant n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 17 — Soient E_1, F_1, E_2, F_2 quatre ensembles non vides et $f_1 : E_1 \longrightarrow F_1$ et $f_2 : E_2 \longrightarrow F_2$ deux applications.

1) Pour tout $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$, on pose :
$$\varphi(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2)).$$
   a) Montrer que φ est injective sur $E_1 \times E_2$ si et seulement si f_1 l'est sur E_1 et f_2 l'est sur E_2.
   b) Même question avec « surjective » à la place d'« injective ».
2) On suppose que $E_1 \cap E_2 = F_1 \cap F_2 = \varnothing$ et que f_1 et f_2 sont bijectives. Construire une bijection de $E_1 \sqcup E_2$ sur $F_1 \sqcup F_2$.

Exercice 18 ★ —

1) Montrer que l'application $(A,B) \longmapsto (2A) \cup (2B+1)$ est bijective de $\mathscr{P}(\mathbb{N})^2$ sur $\mathscr{P}(\mathbb{N})$.
2) On note φ l'application $X \longmapsto X \cap 2\mathbb{N}$ de $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ dans $\mathscr{P}(\mathbb{N})$.
   a) φ est-elle injective ?
   b) φ est-elle surjective ? Déterminer son image.
3) Soient E un ensemble et A une partie de E. On note φ l'application $X \longmapsto X \cup A$ de $\mathscr{P}(E)$ dans lui-même.
   a) φ est-elle injective ?
   b) φ est-elle surjective ? Déterminer son image.
4) Soient E un ensemble et A et B deux parties de E. On note f l'application $X \longmapsto (X \cap A, X \cap B)$ de $\mathscr{P}(E)$ dans $\mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B)$. Montrer que :
   a) f est injective si et seulement si $A \cup B = E$.
   b) f est surjective si et seulement si $A \cap B = \varnothing$.

Exercice 19 — (**doublon TD ?**) Soit E un ensemble. Pour toutes parties A, B de E, on appelle **différence symétrique** de A et B la partie de E :
$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

1) Exprimer $\mathbf{1}_{A\Delta B}$ en fonction de $\mathbf{1}_A$ et $\mathbf{1}_B$.
2) Montrer que $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
3) Montrer que Δ est **associative**, i.e. que pour tous $A, B, C \in \mathscr{P}(E)$:
$$A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C.$$

B - Applications implicites

Exercice 20 — Soient $f : E \longrightarrow F$ une application et B, B' deux parties de F.

1) Montrer que $B \subset B' \Longrightarrow f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B')$.
2) Montrer que $f^{-1}\left(B \cup B'\right) = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$.
3) Montrer que $f^{-1}\left(B \cap B'\right) = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$.
4) Montrer que $f^{-1}\left(\overline{B}\right) = \overline{f^{-1}(B)}$, les complémentaires étant pris respectivement dans F et dans E.
5) a) Montrer que $f\left(f^{-1}(B)\right) \subset B$. Trouver contre-exemple de l'inclusion réciproque.
   b) Montrer que f est surjective si et seulement si
$$\forall B \subset F,\ f\left(f^{-1}(B)\right) = B.$$
6) Soit $g : F \longrightarrow G$ une application. Montrer que
$$\forall C \subset G,\ (g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}\left(g^{-1}(C)\right).$$

Exercice 21 — Soient $f : E \longrightarrow F$ une application et A, A' deux parties de E.

1) Montrer que $A \subset A' \Longrightarrow f(A) \subset f(A')$.
2) Montrer que $f\left(A \cup A'\right) = f(A) \cup f(A')$.
3) a) Montrer que $f\left(A \cap A'\right) \subset f(A) \cap f(A')$.
   b) Montrer, à l'aide d'un contre-exemple, que l'inclusion réciproque est fausse en général.
   c) Montrer que f est injective si et seulement si
$$\forall A, A' \subset E,\ f\left(A \cap A'\right) = f(A) \cap f(A').$$
4) Montrer que $f\left(\overline{A}\right) \supset f(E) \backslash f(A)$.
5) a) Montrer que $A \subset f^{-1}(f(A))$.
   b) Montrer que f est injective si et seulement si
$$\forall A \subset E,\ f^{-1}(f(A)) = A.$$
6) Soit B une partie de F. Montrer que $f\left(A \cap f^{-1}(B)\right) = f(A) \cap B$.
7) Soit $g : F \longrightarrow G$ une application. Montrer que $(g \circ f)(A) = g(f(A))$.

> On pourra retenir de ces exercices que si f est bijective, les applications $A \longmapsto f(A)$ de $\mathscr{P}(E)$ dans $\mathscr{P}(F)$ et $B \longmapsto f^{-1}(B)$ de $\mathscr{P}(F)$ dans $\mathscr{P}(E)$ sont bijectives et réciproques l'une de l'autre.

Exercice 22 — Soit $f : E \longrightarrow I$ une application surjective. On pose $A_i = f^{-1}(\{i\})$ pour tout $i \in I$. Montrer que les A_i sont non vides, deux à deux disjoints, de réunion égale à E.

Exercice 23 — Soient E un ensemble et $f : E \longrightarrow E$ une application. On suppose que $f \circ f = f$ et que f est injective ou surjective. Montrer que $f = \mathrm{Id}_E$.

Exercice 24 ★ — Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow E$ deux applications telles que $f \circ g \circ f$ soit bijective. Montrer que f et g sont bijectives.

Exercice 25 —

1) Soient $f : F \longrightarrow E$ et $g : G \longrightarrow E$ deux applications. Montrer qu'il existe une application $h : G \longrightarrow F$ telle que $g = f \circ h$ si, et seulement si, $g(G) \subset f(F)$. À quelle condition cette application h est-elle unique ?
2) Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : E \longrightarrow G$ deux applications. Montrer qu'il existe une application $h : F \longrightarrow G$ telle que $g = h \circ f$ si, et seulement si,
$$\forall x, y \in E,\quad f(x) = f(y) \Longrightarrow g(x) = g(y).$$
   À quelle condition h est-elle unique ?

Exercice 26 — Soient E et F des ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application.

1) Soit A une partie de E. Vrai ou faux ? Justifier.
   a) Si f est injective, alors $f|_A$ l'est aussi. Et la réciproque ?
   b) Si f est surjective, alors $f|_A$ l'est aussi. Et la réciproque ?
2) Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de parties de E de réunion E et croissante pour l'inclusion. Montrer que si $f|_{A_n}$ est injective pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors f l'est aussi.