LOGIQUE ET ENSEMBLES

Feuille d'exercices

I) PREMIERS PAS

Exercice 1 — Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Nier les assertions suivantes :

1) $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0$. 2) $\forall M > 0,\ \exists A > 0,\ \forall x \geq A,\ f(x) > M$.
3) $\forall x \in \mathbb{R},\ (f(x) > 0 \implies x \leqslant 0)$.
4) $\forall a \in \mathbb{R},\ \forall \epsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\quad |x-a| \leqslant \alpha \implies |f(x)-f(a)| \leqslant \varepsilon$.

Exercice 2 — Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Énoncer en langage courant les assertions suivantes écrites à l'aide de quantificateurs. Peut-on trouver une fonction qui satisfait cette assertion ? Qui ne la satisfait pas ?

1) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ f(x) < f(y)$. 2) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists T \in \mathbb{R},\ f(x) = f(x+T)$.
3) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists T \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = f(x+T)$. 4) $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ y = f(x)$.

Exercice 3 — Vrai ou faux ? Justifier.

1) $\forall x \in \mathbb{R},\ x > 2 \implies x \geq 3$. 2) $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^*)^2,\ x < y \implies \dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{y}$.
3) $\exists x \in \mathbb{R}_+,\ x < \sqrt{x}$. 4) $\forall x, x' \in \mathbb{R}^*,\ x \neq x' \implies \dfrac{x+1}{x} \neq \dfrac{x'+1}{x'}$.
5) $\forall N \in \mathbb{N}^*,\ \exists n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \geq N$. 6) $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + x \geq 0 \implies x \geq 0$.
7) a) $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists N \in \mathbb{N},\ n \leqslant N$. b) $\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \leqslant N$.
8) a) $\forall x \in \mathbb{R},\ x \leqslant 0$ ou $x \geq 0$. b) $(\forall x \in \mathbb{R},\ x \leqslant 0)$ ou $(\forall x \in \mathbb{R},\ x \geq 0)$.
9) a) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists M > 0,\ \mathrm{e}^x \leqslant M$. b) $\exists M > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x \leqslant M$.
c) $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall M > 0,\ \mathrm{e}^x \leqslant M$. d) $\forall M > 0,\ \exists x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x \leqslant M$.

Exercice 4 — Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Écrire avec des quantificateurs les propositions suivantes :

1) f s'annule. 2) f ne s'annule que sur $\mathbb{R}_+$.
3) f s'annule au plus une fois. 4) f est la fonction nulle.
5) f est constante. 6) f n'est pas constante.
7) f est croissante. 8) f ne prend jamais deux fois la même valeur.
9) f est majorée. 10) f possède un minimum.
11) f prend des valeurs aussi grandes que l'on veut. 12) f atteint tous les réels.
13) f est périodique.

Exercice 5 — Décrire les parties de $\mathbb{R}$ dans lesquelles évoluent x pour que les assertions suivantes soient vraies :

1) $(x > 0$ et $x < 1)$ ou $x = 0$ 2) $x > 3$ et $x < 5$ et $x \neq 4$
3) $(x \leqslant 0$ et $x > 1)$ ou $x = 4$ 4) $x \geq 0 \implies x \geq 2$

Exercice 6 — Écrire en langage mathématique l'ensemble :

1) des entiers naturels divisibles par 7.
2) des sommes de deux carrés d'entiers.
3) des entiers relatifs qui possèdent un antécédent par la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^x + x$.

II) RÉCURRENCES

Exercice 7 — Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $2^{n-1} \leqslant n! \leqslant n^n$.

Exercice 8 — Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété suivante : $P_n : 2^n > n^2$.

1) Montrer que l'implication $P_n \implies P_{n+1}$ est vraie pour $n \geq 3$.
2) Pour quelles valeurs de n la propriété P_n est vraie ?

Exercice 9 —

1) On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $u_n = 3^n - 2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2) On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 0$, $u_2 = 2$ et $u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $u_n = n(n-1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 10 — On note f_0 la fonction constante égale à 1 et, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$: $f_{n+1}(x) = (x+1)f_n(x+1)$. Montrer que $f_n(x) = (x+1)\dots(x+n)$ pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 11 — Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe des entiers $a_n, b_n, c_n, d_n \in \mathbb{N}$ pour lesquels : $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{2} + c_n\sqrt{3} + d_n\sqrt{6}$.

Exercice 12 ★ — Montrer que tout entier supérieur à 8 peut être écrit $3a + 5b$ pour certains $a, b \in \mathbb{N}$.

Exercice 13 — On note $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $a_0 = a_1 = 1$ et $a_{n+2} = a_{n+1} + \dfrac{a_n}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

1) $a_n \leqslant n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. 2) $a_n \geq \sqrt{n+1}$ pour tout $n \geq 2$.

Exercice 14 ★ — Sans utiliser le théorème de factorisation première des entiers, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists p, q \in \mathbb{N},\ n = 2^p(2q+1)$.

Exercice 15 ★ — Montrer que $\forall x \in [0,1],\ \forall n \in \mathbb{N},\ 1 - nx \leqslant (1-x)^n \leqslant \dfrac{1}{1+nx}$.

Exercice 16 ★★ — Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, toute fonction croissante f de $[\![1;n]\!]$ dans lui-même possède un point fixe : $\exists k \in [\![1;n]\!],\quad f(k) = k$.

Exercice 17 ★★ — Démontrer que, pour tout entier $n \geq 3$, il existe n entiers strictement positifs $x_1, \dots, x_n$, deux à deux distincts, tels que $\dfrac{1}{x_1} + \cdots + \dfrac{1}{x_n} = 1$.

Indication : On pourra remarquer que $1 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}$.

III) Raisonnements divers

Exercice 18 — Montrer qu'une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ possède au plus un maximum.

Exercice 19 — Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{n(n+1)}{2}$ est un entier naturel.

Exercice 20 — On définit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$. Montrer que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 21 — Trouver l'unique fonction strictement croissante $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ telle que $\forall x \in [0,1],\ f(f(x)) = x$.

Exercice 22 — Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x-1| \leqslant x^2 - x + 1$.

Exercice 23 ★ — Déterminer les réels x pour lesquels l'assertion suivante est vraie : $\forall y \in [0,1],\ x \geq y \Longrightarrow x \geq 2y$.

Exercice 24 — Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que

1) $(\forall \varepsilon \geq 0,\ |a| \leqslant \varepsilon) \implies a = 0$. 2) $(\forall \varepsilon > 0,\ |a| \leqslant \varepsilon) \implies a = 0$.

Exercice 25 — Soit $n \geq 1$ un entier naturel. On se donne $n+1$ réels $x_0, x_1, \dots, x_n$ de $[0,1]$ vérifiant $0 \leqslant x_0 \leqslant x_1 \leqslant \dots \leqslant x_n \leqslant 1$. Montrer qu'il y a deux de ces réels dont la distance est inférieure ou égale à $1/n$.

Exercice 26 — On s'interdit d'utiliser le théorème de factorisation première des entiers. On admet en revanche que $\dfrac{1}{2}$ n'est pas un entier. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on dit que n est **pair** (resp. **impair**) si $n = 2k$ (resp. $n = 2k+1$) pour un certain $k \in \mathbb{Z}$.

1) Montrer qu'un entier ne peut pas être à la fois pair et impair.
2) Montrer par récurrence que tout entier naturel est pair ou impair, puis qu'il en va de même des entiers relatifs.
3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, n est pair si et seulement si n^2 est pair.

IV) Analyse synthèse

Exercice 27 — Déterminer les réels x tels que $\sqrt{2-x} = x$.

Exercice 28 — Montrer qu'il existe un triplet de réels (a,b,c) pour lequel pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$: $\dfrac{1}{x^2(x+1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x^2} + \dfrac{c}{x+1}$.

Exercice 29 — On note $\mathscr{A}$ l'ensemble des fonctions affines et $\mathscr{B}$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables pour lesquelles $f(0) = f'(0) = 0$. Montrer par analyse-synthèse que toute fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est la somme, d'une et une seule manière, d'une fonction de $\mathscr{A}$ et d'une fonction de $\mathscr{B}$.

Exercice 30 ★ — Montrer par analyse-synthèse que toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est la somme, d'une et une seule manière, d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Exercice 31 ★★ —

1) Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables pour lesquelles $\forall x, y \in \mathbb{R} :\ f(x+y) = f(x) + f(y)$.
2) ★ Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ pour lesquelles : $\forall m, n \in \mathbb{N} :\ f(m+n) = f(m)f(n)$.
3) ★★ Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$ pour lesquelles : $\forall m, n \in \mathbb{Z} :\ f(m+n) + f(m-n) = 2f(m) + 2f(n)$.
Indication : Essayer d'obtenir une formule de récurrence d'ordre 2.
4) ★★ Déterminer toutes les **isométries** de $\mathbb{R}$, i.e. les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ pour lesquelles : $\forall x, y \in \mathbb{R},\ |f(x) - f(y)| = |x - y|$.
Indication : Que dire de a et b si $|a| = |b|$ *?*

V) Ensembles

Exercice 32 — Décrire $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\{a\}))$ où a désigne un élément.

Exercice 33 — Soient A, B et C trois ensembles. Montrer que :

1) $A \cup B = B \cap C \implies A \subset B \subset C$.
2) $(C \subset A \cup B$ et $A \cap C \subset B$ et $B \cap C \subset A) \implies C \subset A \cap B$.
3) $(A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C) \implies B = C$.

Exercice 34 — Simplifier les ensembles $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \left[\dfrac{1}{n}, n\right]$ et $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \left]-\dfrac{1}{n}, 1\right[$.