NOMBRES, ÉQUATIONS, INÉQUATIONS

Feuille d'exercices

I) NOMBRES ENTIERS, RATIONNELS, IRRATIONNELS

Exercice 1 — Pour tout $n \in \mathbb{N}$, simplifier les expressions suivantes :

1) $3^{n+2} - 3^{n+1} - 7 \times 3^n + 5 \times 3^{n-1}$
2) $\dfrac{5^n \times 12^2}{10^n \times 6^4}$
3) $\dfrac{32 \times 8^{n-1}}{2^{2n+2} - 4^n}$
4) $16^{n+1} + (-4)^{2n+1} + (-2)^{4n}$

Exercice 2 ★★ — On pose $x^y = \mathrm{e}^{y \ln x}$ pour tous $x > 0$ et $y \in \mathbb{R}$.

1) Montrer que pour tous $x, x' > 0$ et $y, y' \in \mathbb{R}$:
$$x^{y+y'} = x^y x^{y'}, \quad x^{yy'} = (x^y)^{y'} \quad \text{et} \quad (xx')^y = x^y x'^y.$$
2) Montrer que $\dfrac{\ln a}{\ln b}$ est irrationnel pour tous entiers $a, b \geq 2$ premiers entre eux.
3) ★★ Montrer l'existence de deux irrationnels x et y pour lesquels x^y est rationnel de deux façons :
   a) En utilisant le réel $\sqrt{2}$.
   b) En utilisant la question 2).

   Indication : Pour les deux questions, on pensera à la question 1.

Exercice 3 —

1) Que dire de la somme et du produit de deux rationnels (resp. de deux irrationnels, resp. d'un rationnel et d'un irrationnel) ?
2) Soit $\varphi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Montrer que lorsqu'un réel peut être écrit $a + b\varphi$ pour certains $a, b \in \mathbb{Z}$, les entiers a et b sont uniques.
3) Montrer que $\sqrt{n}$ est irrationnel pour tout $n \geq 2$ qui n'est pas un carré d'entier.

II) EQUATIONS, INÉQUATIONS

Exercice 4 — Encadrer $x + y$, $x - y$, xy et x/y sachant que $x \in [3, 6]$ et $y \in [-4, -2]$.

Exercice 5 — Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Exprimer $\max\{x, y\}$ et $\min\{x, y\}$ en fonction de x, y et $|x - y|$. On commencera par calculer leur somme et leur différence.

Exercice 6 — Résoudre les équations suivantes d'inconnue x :

1) $|6 - x| = x$.
2) $\left|x^2 + x - 4\right| = |x - 1|$.
3) $|2x + 3| + |4x - 1| = 6$.
4) $\sqrt{1 - 2x} = |x + 7|$.
5) $x\,|x| = 3x + 2$.
6) $x + 4 = \sqrt{x + 10}$.

Exercice 7 — Résoudre les inéquations suivantes d'inconnue x :

1) $\left|x^2 - 6x + 4\right| \leqslant 1$.
2) $x + 2 < |2x - 5|$.
3) $\dfrac{x}{x+1} \leqslant \dfrac{x+2}{x+3}$.
4) $|3x - 5| \leqslant |2x + 3|$.
5) $|x - 1| \leqslant |2x + 1| + 1$.
6) $x + 3 \leqslant \sqrt{x + 5}$.
7) $\dfrac{x+5}{x^2-1} \geq 1$.
8) $|x + 3| > \left|x^2 - 3\right|$.
9) $\sqrt{|x + 2|} \leqslant |x - 10|$.
10) $\sqrt{x^2 - 1} < 2 - x$.

Exercice 8 — Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$ les expressions suivantes sont-elles bien définies ?

1) $\sqrt{x^2 - 4|x| + 3}$.
2) $\dfrac{\ln(2 - x)}{x - 1 - \sqrt{x^2 - 2}}$.

Exercice 9 — Résoudre en fonction du paramètre $a \in \mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} = a$ d'inconnue $x \geq 0$.

Exercice 10 — Déterminer les nombres réels y solution des inéquations suivantes :

1) $(y + 1)(y - 1) > (y + 1)^2$ 2) $\lambda y + 7 \geq 3y - 5\lambda$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$ donné.

III) INÉGALITÉS ET SUBSTITUTIONS

Exercice 11 — Soient $x, y \geq 0$.

1) Montrer que $\sqrt{x + y} \leqslant \sqrt{x} + \sqrt{y}$.
2) En déduire que si $x \geq y$: $\sqrt{x} - \sqrt{y} \leqslant \sqrt{x - y}$.
3) En déduire que $\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \leqslant \sqrt{|x - y|}$.

Exercice 12 ★★ —

1) Montrer que $\sqrt{xy} \leqslant \dfrac{x + y}{2}$ pour tous $x, y \geq 0$.
2) En déduire que pour tous $x, y > 0$:
$$\frac{x}{x^4 + y^2} + \frac{y}{x^2 + y^4} \leqslant \frac{1}{xy}$$

Exercice 13 ★★ —

1) Montrer que $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} \geq 2$ pour tous $x, y > 0$.
2) En déduire que pour tous $a, b, c > 0$:
$$\frac{a}{b + c} + \frac{b}{c + a} + \frac{c}{a + b} \geq \frac{3}{2}.$$
À quelle condition a-t-on égalité ?

IV) PARTIE ENTIÈRE

Exercice 14 — Montrer que la fonction partie entière est croissante.

Exercice 15 — Soit $x \in \mathbb{R}$. Quelle relation existe-t-il entre $\lfloor x \rfloor$ et $\lfloor -x \rfloor$?

Exercice 16 — Soient a, b deux réels. Prouver que

$$\lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor \leqslant \lfloor a+b \rfloor \leqslant \lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor + 1$$

Exercice 17 ★★ —

1) Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:
   a) $\lfloor 2x \rfloor = 5 + \lfloor -x \rfloor$. b) $\left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$. c) $\lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor^2$.
2) Montrer que pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}^*$:
   a) $\left\lfloor \frac{\lfloor kx \rfloor}{k} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$. b) $\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 3x \rfloor \leqslant \lfloor 6x \rfloor$.
3) ★ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$n\sqrt{2} - \lfloor n\sqrt{2} \rfloor > \frac{1}{2n\sqrt{2}}$$
4) ★★ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \rfloor = \left\lfloor \sqrt{4n+1} \right\rfloor$$

V) Systèmes linéaires

Exercice 18 — Résoudre les systèmes d'inconnues réelles qui suivent :

1) $\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ x + 2y + z = 2 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x - y + z = 2 \\ -x + 2y - 2z = 3 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x - z = 1 \\ -x + y + 2z = 0 \\ x + 2y + z = 3 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x + y - z = 1 \\ x + 2y + z = 2 \\ -x + 3y - z = 5 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x - y + 2z + t = 1 \\ 2x - 3y + z - t = 1 \\ -x + 2y + z + t = 1 \end{cases}$

Exercice 19 ★ — Résoudre pour tout $p \in \mathbb{R}$ les systèmes linéaires suivants d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

1) $\begin{cases} 2px + y = p \\ 2x + py = p \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + py + 2z = 1 \\ px + y + 2z = 1 \\ x + 2py + 3z = 0 \end{cases}$

3) $\begin{cases} px + py + 4z = 1 \\ 2x + y + pz = 1 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + y + z = 1 - p \\ px + (1+p)y + (1+p)z = p - p^2 \\ px + (1-p)y + (1-p)z = p^2 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 2x + py + 6z = 6 \\ -x + 3y + (p-3)z = 0 \end{cases}$