

DEVOIR MAISON

Exercice 1 — Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$.

On a montré en TD que cette suite convergeait vers une limite positive ℓ . Le but de ce problème est de montrer que $\ell = \frac{\pi^2}{6}$.

1) Questions préliminaires

- Montrer que pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $0 < \sin(x) \leq x \leq \tan(x)$.
- En déduire que pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\frac{1}{\sin^2(x)} - 1 \leq \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{\sin^2(x)}$.
- Montrer que pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\frac{1}{\sin^2(x)} + \frac{1}{\sin^2(\frac{\pi}{2} - x)} = \frac{4}{\sin^2(2x)}$.

2) Une suite auxiliaire

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $T_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k+1)^2}$.

- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_{2n+1} = \frac{1}{4}S_n + T_n$.
- En déduire que $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge, et exprimer sa limite en fonction de ℓ .

3) Calcul de ℓ . Dans cette question, on pose :

$$\forall (k, n) \in \mathbb{N}^2, x_{k,n} = \frac{2k+1}{2^n} \times \frac{\pi}{2}, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \frac{1}{\sin^2(x_{k,n})}.$$

- Calculer u_1 .

- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1} \frac{1}{\sin^2(x_{k,n+1})} = \sum_{j=0}^{2^{n-1}-1} \frac{1}{\sin^2(\frac{\pi}{2} - x_{j,n+1})}$.

On pourra utiliser le changement d'indice $j = 2^n - 1 - k$.

- En utilisant la question 1c, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = 4u_n$. En déduire l'expression de u_n en fonction de n .
- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{4^{n+1}}{\pi^2} T_{2^{n-1}-1} = \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \frac{1}{(x_{k,n})^2}$.
- Déduire de la question 1b que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{\pi^2}{4^{n+1}} u_n - \frac{\pi^2}{2^{n+3}} \leq T_{2^{n-1}-1} \leq \frac{\pi^2}{4^{n+1}} u_n.$$

- Calculer la limite de $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et en déduire que $\ell = \frac{\pi^2}{6}$.