

# DM 1 - APPLICATIONS - CORRECTION

**Exercice 1** — On considère la fonction :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto e^{-x^2} \end{cases}.$$

- (1) (a) Montrer que  $f$  est paire.  
 (b) Etudier  $f$  et tracer l'allure de sa courbe représentative.
- (2) (a)  $f$  est-elle injective ?

## Démonstration

La fonction  $f$  est paire d'après 1.(a). En particulier,  $f(-1) = f(1)$  et  $-1 \neq 1$  donc la fonction  $f$  n'est pas injective. ■

- (b)  $f$  est-elle surjective ?

## Démonstration

La fonction exp est à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$ . Ainsi,  $-1$  n'a pas d'antécédent par  $f$ . Finalement, la fonction  $f$  n'est pas surjective. ■

- (3) (a) Déterminer  $f([-1, +\infty[)$ .

## Démonstration

Puisque  $f$  est paire, on a  $f([-1, +\infty[) = f(\mathbb{R}_+)$ .  
 Comme la fonction  $f$  est continue et strictement décroissante sur  $\mathbb{R}_+$ , que  $f(0) = 1$  et  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ , on a, d'après le théorème de la bijection,  $f$  qui réalise une bijection de  $\mathbb{R}_+$  sur  $]0, 1]$  et donc  $f(\mathbb{R}_+) = ]0, 1]$ . Finalement,  $f([-1, +\infty[) = ]0, 1]$ . ■

- (b) Déterminer  $f^{-1}([1, 2])$ .

## Démonstration

Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}([1, 2]) &\iff f(x) \in [1, 2] \\ &\iff 1 \leq e^{-x^2} \leq 2 \\ &\iff 0 \leq -x^2 \leq \ln 2 \quad \text{par croissance de } \ln \\ &\iff -\ln 2 \leq x^2 \leq 0 \\ &\iff x^2 = 0 \\ &\iff x = 0 \end{aligned}$$

Donc  $f^{-1}([1, 2]) = \{0\}$  ■

- (4) On considère la fonction :

$$g : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow ]0, 1] \\ x & \longmapsto e^{-x^2} \end{cases}.$$

- (a) Montrer que  $g$  est bijective et déterminer sa réciproque.

## Démonstration

- **Injectivité** : Soient  $x, t \in \mathbb{R}_+$ . Si  $g(x) = g(t)$  alors  $e^{-x^2} = e^{-t^2}$ .  
 En appliquant la fonction  $\ln$ , il vient  $-x^2 = -t^2$  et donc  $x^2 = t^2$ .  
 En appliquant la fonction  $\sqrt{\cdot}$ , on obtient  $|x| = |t|$ .  
 Enfin, par hypothèse  $x, t \geq 0$ , ce qui donne  $x = |x|$  et  $t = |t|$  et donc  $x = t$ . Finalement, la fonction  $g$  est injective.
- **Surjectivité** : La fonction  $x \mapsto -x^2$  est surjective de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}_-^*$  et la fonction exp est surjective de  $\mathbb{R}_-^*$  dans  $]0, 1]$ . Ainsi, la fonction  $g$  est surjective de  $\mathbb{R}_+^*$  dans  $]0, 1]$  par composition.
- **Réciproque** : Comme on nous a demandé de trouver la réciproque, il est en fait plus malin d'expliciter la réciproque ce qui montrera par la même occasion que la fonction  $g$  est bijective. Pour trouver une réciproque, on résout au brouillon l'équation  $y = g(x)$ . Soient

$y \in ]0, 1]$  et  $x \in \mathbb{R}_+$ ,

$$\begin{aligned} y = g(x) &\iff y = e^{-x^2} \\ &\iff \ln y = -x^2 \\ &\iff -\ln y = x^2 \\ &\iff \sqrt{-\ln y} = |x| \text{ car } y \in ]0, 1[ \text{ donc } \ln y \leq 0 \\ &\iff \sqrt{-\ln y} = |x| \text{ car } x \in \mathbb{R}_+ \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction  $h : \begin{cases} ]0, 1] & \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ t & \longmapsto \sqrt{-\ln t} \end{cases}$  est la réciproque de la fonction  $g$ . En particulier, la fonction  $g$  est bijective. ■

(5) (a) Montrer que la composée  $g^{-1} \circ f$  est bien définie.

**Démonstration**

La fonction  $g^{-1}$  est définie sur  $]0, 1]$  et  $f$  est à valeurs dans  $]0, 1]$ .  
Donc La fonction  $g^{-1} \circ f$  est bien définie.. ■

(b) Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}_+, g^{-1} \circ f(x) = x$ .

**Démonstration**

Soit  $x \in \mathbb{R}_+$ . Comme  $x \in \mathbb{R}_+$  et  $g = f|_{\mathbb{R}_+}$ , on a  $g(x) = f(x)$  et donc  $g^{-1}(f(x)) = g^{-1}(g(x)) = x$ .  
Donc,  $\forall x \in \mathbb{R}_+, g^{-1} \circ f(x) = x$ . ■

(c) Soit  $x \in \mathbb{R}_^*$ , calculer  $g^{-1} \circ f(x)$ .

**Démonstration**

Soit  $x \in \mathbb{R}_^*$ . Comme  $f$  est paire, on a  $f(-x) = f(x)$ . Ainsi, puisque  $-x \in \mathbb{R}_+$  et  $g = f|_{\mathbb{R}_+}$ , on a  $f(-x) = g(-x)$ . On a donc  $g^{-1}(f(x)) = g^{-1}(f(-x)) = g^{-1}(g(-x)) = -x$ .  
Donc,  $\forall x \in \mathbb{R}_^*, g^{-1} \circ f(x) = -x$ . ■

**Démonstration**

Soit  $x \in \mathbb{R}$ .  
On a, par parité de la fonction carré,  $f(-x) = e^{-(-x)^2} = e^{-x^2} = f(x)$ .  
Donc  $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)$ . Autrement dit, la fonction  $f$  est paire. ■

**Démonstration**

Comme la fonction  $f$  est paire, il suffit de l'étudier sur  $\mathbb{R}_+$ . La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = -2xe^{-x^2} \leq 0$ . De plus,  $f(0) = 1$  et  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ .  
Donc  $f$  décroît de 1 à 0 sur  $\mathbb{R}_+$  et elle croît de 0 à 1 sur  $\mathbb{R}_-$ . ■

**Exercice 2** — Le but de ce problème est de déterminer toutes les applications de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$  telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(n+1) > f \circ f(n) \quad (1)$$

(1) Montrer que  $f = \text{Id}_{\mathbb{N}}$  vérifie Equation (1)

(2) Soit  $f$  une application de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$  vérifiant Equation (1). On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, E_n = \llbracket n; +\infty \llbracket$$

(a) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  l'ensemble  $E_n$  est stable par  $f : f(E_n) \subset E_n$ .

(b) En déduire que :  $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) \geq n$ .

**Démonstration**

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On a  $n \geq n$  donc  $n \in E_n$ . En utilisant la question 2.(a),  $f(n) \in E_n$  donc  $f(n) \geq n$ . ■

(c) Montrer que  $f$  est strictement croissante.

### Démonstration

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Appliquons 2.(b) à  $f(n) : f(f(n)) \geq f(n)$ . Or, d'après (1),  $f(n+1) > f(n)$  donc la fonction  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  est strictement croissante. ■

(d) En déduire que  $f = \text{Id}_{\mathbb{N}}$ .

### Démonstration

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Si  $f(n) \neq n$  alors comme  $f(n) \geq n$ , on a  $f(n) > n$  c'est-à-dire  $f(n) \geq n+1$ . Donc, comme  $f$  est strictement croissante :  $f(f(n)) \geq f(n+1)$  ce qui est contraire à l'hypothèse (1). Ainsi, par l'absurde, on a montré que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f(n) = n$ . Autrement dit,  $f = \text{Id}_{\mathbb{N}}$ . ■

(3) Conclure.

### Démonstration

Analyse : Si  $f$  vérifie (1) alors  $f = \text{Id}_{\mathbb{N}}$  d'après 2.

Synthèse : Posons  $f = \text{Id}_{\mathbb{N}}$ . D'après 1,  $f$  vérifie (1).

Ainsi, l'unique application vérifiant (1) est  $f = \text{Id}_{\mathbb{N}}$ . ■

### Démonstration

Soit  $n \in \mathbb{N}$ .  $f(n+1) = n+1$  et  $f(f(n)) = f(n) = n$ . Donc  $f(n+1) > f \circ f(n)$ . Ainsi,  $\text{Id}_{\mathbb{N}}$  vérifie bien Equation (1). ■

### Démonstration

Raisonnons par récurrence :

Si  $n = 0$ , alors  $E_0 = \mathbb{N}$  donc  $f(E_0) \subset E_0$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons que  $f(E_n) \subset E_n$ . Soit  $y \in f(E_{n+1})$  et  $x \in E_{n+1}$  tel que  $y = f(x)$ . Comme  $E_{n+1} \subset E_n$ , on a  $y \in f(E_n)$  et donc, par hypothèse de récurrence,  $y \in E_n$  c'est-à-dire que  $y = f(x) \geq n$ .

Si, par l'absurde,  $y = n$ , alors en appliquant (1) à  $x-1 \in \mathbb{N}$  (car  $k \geq n+1 \geq 1$ ), on a  $f(x) > f(f(x-1))$  et donc  $n > f(f(x-1))$ .

Or  $x-1 \in E_n$ , donc, par hypothèse de récurrence,  $f(x-1) \geq n$  et  $f(f(x-1)) \geq n$  ce qui est contradictoire.

Ainsi, on a  $y \neq n$  et donc  $y > n$ .

Par récurrence, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f(E_n) \subset E_n$ . ■