

RELATIONS BINAIRES ET APPLICATIONS

Exercice 1 — Le but de ce problème est de déterminer toutes les applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(n+1) > f \circ f(n) \quad (1)$$

(1) Montrer que $f = \text{Id}_{\mathbb{N}}$ vérifie (1)

(2) Soit f une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ vérifiant (1). On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad E_n = \llbracket n; +\infty \llbracket$$

(a) (**Difficile**) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'ensemble E_n est stable par $f : f(E_n) \subset E_n$.

(b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(n) \geq n$.

(c) Montrer que f est strictement croissante.

(d) En déduire que $f = \text{Id}_{\mathbb{N}}$.

(3) Conclure.

Indication : On pourra raisonner par récurrence